ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ВАСИЛ ВАСИЛЕВ

Васил Василев. ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В работе исследуется инвариантность одного класса линейных дифференциальных уравнений по отношению к однопараметрическим группам Ли. Данный класс уравнений выбран в качестве предмета исследований в связи с тем, что к этому классу относится ряд уравнений механики пластин и оболочек. Доказано, что если уравнение данного вида допускает группу, то сужение этой группы на пространстве независимых переменных является не более чем шестипараметрической подгруппой группы конформных преобразований евклидовой плоскости. Полностью определены групповые свойства уравнений данного класса по отношению к группе гомотетий.

Vassil Vassilev. GROUP PROPERTIES OF A CLASS OF FOURTH-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

The invariance under Lie groups of transformations of a class of linear p. d. eqns is investigated. The choice of this class of p. d. eqns is grounded on its applicability to different mechanical problems. A set of determining equations is obtained for the generators of admissible symmetry groups. A group - classification theorem is proved. If p. d. eqn of the considred class admits a group, then the restriction of this group on

the space of independent variables is not broader then a six - parameter subgroup of conformal transformations group of the plane. The group properties of the investiga... p d ec rs with respect to the homothetic motions group of the plane [illegible]

1. ОПИСАНИЕ КЛАССА УРАВ[illegible]

В [illegible] пространстве неза[illegible]исимых пер[illegible] [illegible] наш[illegible] класс [illegible] однородных дифференциа[illegible] [illegible]ида

$$g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu w + a^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta w + b^{\alpha} [illegible] \tag{1}$$

для искомой функции w. В этой записи принято: [illegible] пр[illegible]странство R^2 отнесено к общей системе криволинейных координат (x^1, x^2), через $g^{\alpha\beta}$ обозначен метрический тензор пространства R^2; ∇ — оператор ковариантного дифференцирования; $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}, b^\alpha$ и c соответственно тензорное, векторное и скалярное поля на $\mathbf{R}^2$ класса $\mathbf{C}^\infty$; греческие индексы принимают значения 1, 2; по повторяющемуся ковариантному и контравариантному греческому индексу производится суммирование.

В работе изучаются групповые свойства уравнений вида (1) в смысле инвариантности относительно локальных групп Ли точечных переобразований пространства $\mathbf{R}^3(x^1, x^2, w)$ независимых и зависимой переменных и проводится групповая классификация по отношению к произвольному элементу — набору $\{a^{\alpha\beta}, b^\alpha, c\}$ коэффициентов уравнения (см. [1, §6]).

Данный клас дифференциальных уравнений выбран в качестве предмета исследований в связи с тем, что к этому классу относится ряд уравнений механики пластин и оболочек, а также и некоторые уравнения гидроупругости и магнитоупругости (см. [2 -6]).

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Построение системы определяющих уравнений для касательного поля $\zeta = (\xi^1, \xi^2, \eta)$ группы $G(\xi)$, допускаемой уравнением вида (1), осуществляется в соответствии с алгоритмом Ли — Овсянникова [1, с.69]. Решение этой задачи не вызывает принципиальных затруднений, однако оно связано с довольно большим объемом аналитических выкладок. Поэтому ниже приводятся только окончательные результаты.

Т е о р е м а 1. а) Группа, допускаемая уравнением класса (1), содержит стандартную (связанную с линейностью и однородностью данных уравнений) инвариантную подгруппу, порожденную операторами

$$X_0 = w\partial/\partial w, \qquad X_u = u\partial/\partial w,$$

где u — решение уравнения.

б) Беря факторгруппу по этой инвариантной подгруппе, каждый допускаемый оператор можно представить в виде

$$X = \xi^\mu \partial/\partial x^\mu + (1/2)(w \nabla_\mu \xi^\mu)\partial/\partial w, \tag{2}$$

. г

...пускает оператор вида (2) тогда и только ...является решением системы уравнений

$$\ldots\nabla_\mu\xi^\alpha = \ldots^\beta\nabla\ldots$$

$$\ldots\xi^\mu\nabla_\mu a_\alpha \ldots = -2\nabla\ldots\nabla_\beta\nabla_\mu\xi^\mu,$$

$$\ldots\nabla_\mu\xi\ldots \qquad \ldots\xi^\mu\nabla_\mu b_\alpha = -(a/2)\nabla_\alpha\nabla_\mu\xi^\mu$$

$$2p\nabla_\mu\xi^\mu + \xi^\mu\nabla_\mu p = 0,$$

...если $a \neq 0$, или уравнения

$$2q\nabla_\mu\xi^\mu + \xi^\mu\nabla_\mu q = 0,$$

...если $a = 0$, где

$$a = g_{\mu\nu}a^{\mu\nu},$$

$$p = 8c - a_{\mu\nu}a^{\mu\nu} - (4/a)b_\mu b^\mu,$$

$$q = 8c - a_{\mu\nu}a^{\mu\nu} - 4\nabla_\mu b^\mu.$$

Пусть G — группа преобразований пространства $\mathbf{R}^3(x^1, x^2, w)$ с опе... ...а G_r — ее сужение на пространстве $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$, определенном ... оператором

$$X_r = \xi^\mu(x)\partial/\partial x^\mu.$$

Если группа G допускается уравнением (1), то в силу теоремы 1 касательное поле ξ^μ группы G_r удовлетворяет уравнениям (3). Эти уравнения, как известно, являются определяющими уравнениями группы конформных преобразований пространства $\mathbf{R}^2$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Сужение G_r группы G, допускаемой уравнением ... (1), является подгруппой группы конформных преобразований пространства $\mathbf{R}^2$.

Определяющие уравнения (3), записанные в прямоугольной декартовой системе координат* (x^1, x^2), совпадают с уравнениями Коши — Римана

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} = \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^1} = 0.$$

*... латинскими индексами обозначены компоненты соответствующих тензорных величин ... прямоугольной декартовой системы координат в пространстве $\mathbf{R}$...

Поэтому каждому решению ξ^a системы определяющих уравнений (3) — (7) соответствует голоморфная комплексная функция

(11) $$f = \tilde{\xi}^1 + i\tilde{\xi}^2$$

комплексной переменной $z = \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2$. Записывая формально уравнения (3) — (7) в системе координат $(z, \bar{z})$, определяемой соотношениями

$$z = \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2, \qquad \bar{z} = \tilde{x}^1 - i\tilde{x}^2,$$

приходим к эквивалентной системе уравнений для функции (11). Она состоит из уравнений

(12) $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

(13) $$f''' + 2hf' + \frac{\partial h}{\partial z} f + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0,$$

(14) $$a(f' + \bar{f}') + \frac{\partial a}{\partial z} f + \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0,$$

(15) $$af'' + b(2f' + \bar{f}') + \frac{\partial b}{\partial z} f + \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0$$

и уравнения

(16) $$2p(f' + \bar{f}') + \frac{\partial p}{\partial z} f + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0,$$

если $a \neq 0$, или уравнения

(17) $$2q(f' + \bar{f}') + \frac{\partial q}{\partial z} f + \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0,$$

если $a = 0$. В уравнениях (12) — (17) приняты обозначения

(18) $$h = (\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22} - 2i\tilde{a}_{12})/8,$$

(19) $$b = \tilde{b}_1 - i\tilde{b}_2,$$

(20) $$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} - i\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + i\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2}\right).$$

В записи уравнений (13) — (17) учитывается, что действие оператора $\partial/\partial z$ совпадает с дифференцированием по переменной z (оно здесь обозначается штрихом) только на множестве голоморфных функций, которое, как известно, совпадает с ядром оператора $\partial/\partial\bar{z}$. Как обычно, если v некоторая комплексная функция, то чрез $\bar{v}$ обозначена ее комплексно сопряженная.

Задача групповой классификации дифференциальных уравнений (1) сводится к задаче классификации пространства голоморфных решений системы уравнений (13) — (17) по отношению к произвольному элементу — набору функций $\{h, a, b, p\}$, если $a \neq 0$ или $\{h, b, q\}$, если $a = 0$.

3.ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Пусть $f(z)$ — голоморфная функция, а $\varphi(z)$ - вещественная функция, отличная от нуля. Рассмортим следующее уравнение для функции $f(z)$:

$$f' + \bar{f}' + \frac{\partial \ln\varphi}{\partial z} f + \frac{\partial \ln\varphi}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0. \tag{21}$$

Для коэффициентов этого уравнения существуют следующие альтернативные возможности: (A) функция φ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = C\varphi,$$

где C некоторая вещественная постоянная; (B) для любой вещественной постоянной C выполняется

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \neq C\varphi. \tag{22}$$

Случай (A). Здесь существуют две возможности: (A_1) $C = 0$ и (A_2) $C \neq 0$.

(A_1) Если $C = 0$, то $\ln\varphi$ будет гармонической функцией. Поэтому функцию φ можно представить в виде

$$\varphi = \lambda'\bar{\lambda}', \tag{23}$$

где λ и λ — голоморфные функции, отличные от постоянной. С помощью подстановки (23) уравнение (21) сводится к следующему уравнению

$$f' + (\lambda''/\lambda')f = C_1 + iC_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные постоянные. Отсюда следует, что в данном случае каждое решение уравнения (21) имеет вид

$$f = C_1 \frac{\lambda}{\lambda'} + C_2 \frac{i\lambda}{\lambda'} + C_3 \frac{1}{\lambda'} + C_4 \frac{i}{\lambda'},$$

где C_3 и C_4 — произвольные вещественные постоянные. Это означает, что в рассматриваемом случае пространство решений уравнения (21) является четырехмерным векторным пространством над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$.

(A_2) Если $C \neq 0$, то, используя общее представление решений уравнения Лиувилля [1, с. [illegible]], [[illegible] 7], функцию φ можно записать в виде

$$\varphi = \frac{2}{C}\frac{\varkappa'\bar{\lambda}'}{(\varkappa+\bar{\lambda})^2}, \tag{24}$$

где $\varkappa$ и λ — голоморфные функции, отличные от постоянной. Если к уравнений (21) применить оператор $\partial/\partial z$, потом разделить на $C\varphi$ и к полученному результату снова применить оператор $\partial/\partial z$, то получается уравнение, которое с помощью подстановки (24) можно представить в виде

$$f''' + 2\omega f' + \omega' f = 0,$$

где

$$\omega = \left(\frac{\varkappa''}{\varkappa'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa''}{\varkappa'}\right)^2$$

Прямой подстановкой можно проверить, что общее решение этого уравнения дается формулой

$$f = k_1\frac{1}{\varkappa'} + k_2\frac{\varkappa}{\varkappa'} + k_3\frac{\varkappa^2}{\varkappa'}, \tag{25}$$

где k_1, k_2 и k_3 — комплексные постоянные. В данном случае каждое решение исходного уравнения (21) будет функцией вида (25), но не все функции указанного вида являются решениями этого уравнения. Действительно, пусть f_0 нетривиальное решение уравнения (21). Допустим, что if_0 тоже удовлетворяет этому уравнению. Теперь, если подставить эти функции в уравнение (21) и к сумме полученных выражений применить оператор $\partial/\partial\bar{z}$, то оказывается, что

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} f_0 = 0.$$

Но в данном случае

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} \neq 0$$

и, значит, $f_0 = 0$. Получается противоречие. Из этого следует вывод, что не существует решения f_0 (кроме $f_0 = 0$), для которого функция if_0 была бы тоже решением этого уравнения. По этой причине, если $(f_j), j = 1, 2, 3$ — базис в пространстве функций вида (25), такой, что каждая из функций f_j удовлетворяет уравнению (21), то решениями этого уравнения могут быть только линейные комбинации функций f_j с вещественными коэффициентами. Поэтому в данном случае пространство решений уравнения (21) будет не более чем трехмерное векторное пространство над $\mathbf{R}$.

Случай (B). Введем в рассмотрение функцию

$$\psi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right). \tag{26}$$

В силу предположения (22) эта функция хорошо определена и отлична от нуля. Если к уравнению (21) применить оператор $\partial^2/\partial z\partial\bar{z}$, потом разделить на $\partial^2 \ln \varphi/\partial z\partial\bar{z}$ и из последнего выражения вычесть уравнение (21), то получается уравнение, которое, после некоторых элементарных преобразований, можно записать, с помощью подстановки (26), в виде

$$f' + \frac{\partial \ln(\psi/\overline{\psi})}{\partial z} = 0. \tag{27}$$

Уравнение (27) имеет нетривиальное решение только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 \ln(\psi/\overline{\psi})}{\partial z\partial\bar{z}} = 0.$$

В этом случае имеет место представление

$$(\psi/\overline{\psi}) = \sigma\overline{\lambda},$$

где σ и λ — голоморфные функции, отличные от нуля. Поэтому общее решение уравнения (27) имеет вид

$$f = k(1/\sigma). \tag{28}$$

где k — комплексная постоянная. Следовательно, в данном случае каждое решение исходного уравнения (21) будет функцией вида (28). Пусть f_0 — нетривиальное решение уравнения (21). Тогда функции f_0 и if_0 можно взять в качестве базиса пространства функций вида (28). Но, учитывая, что функция if_0 не является решением уравнения (21) (см. A_2), приходим к выводу, что пространство решений уравнения (21) в рассматриваемом случае будет не более чем одномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$.

4 АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ (14), (16) И (17)

Каждое из этих уравнений удовлетворяется тождественно, если соответствующая функция a, p или q равна нулю. Если эти функции отличны от нуля, то очевидно, каждое из указанных уравнений можно представить в виде (21), если положить соответственно

$$\varphi = a, \qquad \varphi = p^{1/2}, \qquad \varphi = q^{1/2}.$$

5 АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (15)

Пусть $a = 0, b = 0$. Тогда уравнение (15) удовлетворяется тождественно

Пусть $a = 0, b \neq 0$. Тогда, если уравнение (15) разделить на b и прибавить к полученному уравнению его комплексно сопряженное, то с помощью подстановки

$$\varphi = (b\bar{b})^{1/3} \tag{29}$$

приходим к уравнению (21).

Отметим, что если воспользоваться соотношением (19), то функцию (29) можно выразить в ковариантной форме

$$\varphi = (b^{\mu} b_{\mu})^{1/3}.$$

Пусть $a \neq 0, b = 0$. Тогда общее решение уравнения (15) дается формулой

$$f = k_1 z + k_2,$$

где k_1 и k_2 -- комплексные постоянные.

Пусть $a \neq 0, b \neq 0$. Тогда уравнение (15) можно заменить следующим эквивалентным уравнением

$$d(2f' + \overline{f}') + \frac{\partial d}{\partial \bar{z}} f + \frac{\partial d}{\partial \bar{z}} \overline{f} = 0, \tag{30}$$

где

$$d = 2b - 2\partial a/\partial z. \tag{31}$$

Действительно, если к уравнению (14) применить оператор $\partial/\partial z$ и вычесть полученное выражение из уравнения (15), то после подстановки (31) приходим к уравнению (30). Если $d \neq 0$, то оно сводится к уравнению (21), если положить

$$\varphi = (d\bar{d})^{1/3}. \tag{32}$$

Если $d = 0$, то уравнение (30) удовлетворяется тождественно. Используя выражения (19) и (20) и вектор

$$d^{\alpha} = 2b^{\alpha} - \nabla^{\alpha} a,$$

представим функцию (31) в виде

$$d = d^1 - id^2.$$

Из этого следует, что выражение (32) можно записать в ковариантной форме

$$\varphi = (d^{\mu} d_{\mu})^{1/3}.$$

6. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (13)

Для коэффициентов уравнения (13) существуют две возможности: (1°) $\partial h/\partial\bar{z} = 0$; (2°) $\partial h/\partial\bar{z} \neq 0$.

Случай (1°). Пусть $\partial h/\partial\bar{z} = 0$. Тогда функция h будет голоморфной, а уравнение (13) примет вид

$$f''' + 2hf' + h'f = 0. \tag{33}$$

Пространство решений этого уравнения является трехмерным векторным пространством над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Его можно овеществить обычным способом (см. например [7]) и рассматривать дальше как шестимерное векторное пространство над $\mathbf{R}$.

Случай (2°). Пусть $\partial h/\partial\bar{z} \neq 0$. Тогда если к уравнению (13) применить оператор $\partial/\partial z$, потом разделить на $\partial h/\partial\bar{z}$ и прибавить к полученному уравнению его комплекно сопряженное, то, полагая

$$\varphi = \left(\frac{\partial h}{\partial\bar{z}}\frac{\overline{\partial h}}{\partial\bar{z}}\right)^{1/3} \tag{34}$$

приходим к уравнению (21).

Отметим, что с помощью вектора

$$a^{\alpha} = 2\Gamma_{\mu}a^{\alpha\mu} - \nabla^{\alpha}a \tag{35}$$

функцию $\partial h/\partial\bar{z}$ можно выразить следующим образом

$$\partial h/\partial\bar{z} = \tilde{a}^1 - i\tilde{a}^2, \tag{36}$$

а функцию (34) можно записать в ковариантной форме $\varphi = (a^{\mu}a_{\mu})^{1/3}$. Ето можно показать, исходя из выражений (8), (18) и (20).

7. КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь формулируются наиболее существенные результаты групповой классификации уравнений вида (1), которые устанавливаются на основании анализа определяющих уравнений (13) — (17), проведенного в п.п. 3 — 6.

Т е о р е м а 3. Если уравнение класса (1) допускает группу G, то эта группа не более чем шестипараметрическая.

Доказательство. Если уравнение вида (1) допускает группу G, то, в силу теоремы 1, касательное поле ξ^{α} ее суждения G_r удовлетворяет системе определяющих уравнений (3) — (7). Но, как было показано в п.2, это выполняется тогда и только тогда, когда $f = \tilde{\xi}^1 + i\tilde{\xi}^2$ является голоморфной функцией, принадлежащей пространству решений системы уравнений (12) — (17), и, в частности, пространству решений уравнения

(13). Так как пространство решений уравнения (13) является не более чем шестимерным векторным пространством над $\mathbf{R}$ (см. п.6 и п.3), то группа G будет не более чем шестипараметрической. Тогда, учитывая, что, согласно общему виду допускаемого оператора (2), число параметров группы G совпадает с числом параметров группы G_x, приходим к выводу, что группа G не более чем шестипараметрическая.

Т е о р е м а 4. Если группа G допускается уравнением класса (1), для которого хотя бы один из векторов a^α, b^α или скаляров a, q отличен от нуля, то эта группа не более чем четырехпараметрическая.

Доказательство. Если хотя бы один из векторов a^α, b^α или скаляров a, q отличен от нуля, то тогда система определяющих уравнений (12) — (17) содержит хотя бы одно уравнение, которое можно свести к уравнению вида (21), причем соответствующая функция φ будет отлична от нуля. В случае $a \neq 0$ это уравнение (14) (см. п.4); в случае $a = 0, q \neq 0$ — уравнение (17) (см. п.4); в случае $a = 0, b^\alpha \neq 0$ — уравнение (15) (см. п.5), причем здесь надо учитывать, что, согласно выражению (19), $b^\alpha \neq 0$ тогда и только тогда, когда $b \neq 0$; в случае $a = 0, a^\alpha \neq 0$ это уравнение (13) (см. п.6), причем здесь надо учитывать, что, согласно выражению (36), $a^\alpha \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\partial h/\partial \overline{z} \neq 0$ и тогда имеет место случай 2°, п.6. Как было показано в п.3, пространство решений уравнения (21) при $\varphi \neq 0$ является не более чем четырехмерным векторным пространством над $\mathbf{R}$. Отсюда, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3, можно заключить, что допускаемая группа не более чем четырехпараметрическая.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение класса (1) допускало группу максимального порядка.

Т е о р е м а 5. Уравнение вида (1) допускает шестипараметрическую группу G тогда и только тогда, когда все векторы a^α, b^α и скаляры a, q тождественно равны нулю.

Доказательство. Если все перечисленные векторы и скаляры тождественно равны нулю, то тогда, учитывая соотношения (19) и (36), приходим к выводу, что все определяющие уравнения, кроме уравнения (13), удовлетворяются тождественно, а оно сводится к уравнению (33) (см. 1°, п.6). Из этого следует, что пространство решений системы определяющих уравнений, в данном случае, будет шестимерным векторным пространством над $\mathbf{R}$. Как уже обсуждалось при доказательстве теоремы 3, размерность этого пространства совпадает с числом параметров допускаемой группы, и, следовательно, эта группа будет шестипараметрической.

Наоборот, если хотя бы один из перечисленных векторов и скаляров отличен от нуля, то, согласно теореме 4, допускаемая группа не более чем четырехпараметрическая.

С л е д с т в и е. Уравнение вида (1) допускает шестипараметрическую группу G, которая, в силу теоремы 3, является группой максимального порядка для уравнений данного класса тогда и только тогда, когда для его коэффициентов имеют место соотношения

$$a^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha\nabla^\beta\Phi, \quad b^\alpha = 0, \quad c = (1/8)(\nabla^\mu\nabla^\nu\Phi)\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi), \tag{37}$$

где Φ — произвольная гармоническая функция.

Доказательство. Соотношения (37) эквивалентны условиям теоремы 5. Действительно, свертывая равенства $(37)_1$ с метрическим тензором $g^{\alpha\beta}$, получаем, что $a = 0$, так как функция Φ гармоническая. По той же причине равна нулю и дивергенция тензора $a^{\alpha\beta}$. Тогда из формулы (35) следует, что $a^\alpha = 0$. Если подставить формулы (37) в выражение (10), то получается, что $q = 0$. Наоборот, если $a = 0$ и $a^\alpha = 0$, то из формулы (35) следует, что дивергенция симметрического тензора $a^{\alpha\beta}$ равна нулю. Но это, как известно, является необходимым и достаточным условием существования функции Φ, такой, что

$$a^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha\nabla^\beta\Phi - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi. \tag{38}$$

Свертывая обе части равенства (38) с метрическим тензором $g^{\alpha\beta}$ и учитывая, что $a = 0$, получаем

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = 0, \tag{39}$$

т.е. Φ будет гармонической функцией. Из выражений (38) и (39) следует соотношение $(37)_1$. И наконец, если $q = 0$, то из выражений (10) и $(37)_{1,2}$ получается соотношение $(37)_3$.

Результаты, полученные в п.п.3 — 6, дают возможность осуществить более детальную групповую классификацию уравнений класса (1), но здесь мы ограничились изложением только наиболее общих групповых свойств уравнений данного вида.

8. ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ КЛАССА (1) ПО ОТНОШЕНИЮ К ГРУППЕ ГОМОТЕТИЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{R}^2$

Определяющие уравнения группы гомотетий пространства $\mathbf{R}^2$, как известно, имеют вид

$$g^{\alpha\mu}\nabla_\mu\xi^\beta + g^{\beta\mu}\nabla_\mu\xi^\alpha = 2C_1 g^{\alpha\beta}$$

с общим решением

$$\begin{aligned} \xi^1 &= C_1 x^1 - C_2 x^2 + C_3, \\ \xi^2 &= C_2 x^1 + C_1 x^2 + C_4, \end{aligned} \tag{40}$$

где $C_1 - C_4$ — вещественные постоянные. Общий вид оператора этой группы дается формулой

$$X = \sum_{j=1}^{4} C_j X_j. \tag{41}$$

где

$$X_1 = \tilde{x}^1\partial/\partial\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2\partial/\partial\tilde{x}^2, \qquad X_3 = \partial/\partial\tilde{x}^1,$$

$$X_2 = \tilde{x}^1\partial/\partial\tilde{x}^2 - \tilde{x}^2\partial/\partial\tilde{x}^1, \qquad X_4 = \partial/\partial\tilde{x}^2.$$

Группа гомотетий является подгруппой группы конформных преобразований, определенной условием $\nabla_\mu\xi^\mu = 2C_1$. Поэтому ее касательное поле ξ^α удовлетворяет определяющим уравнениям (3). Остальные определяющие уравнения, с учетом выражений (40), после некоторых элементарных преобразований можно записать в виде

$$4C_1\tilde{a}^{\alpha\beta} - \tilde{a}^{\alpha\mu}\frac{\partial\tilde{\xi}^\beta}{\partial\tilde{x}^\mu} - \tilde{a}^{\mu\beta}\frac{\partial\tilde{\xi}^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu} + \tilde{\xi}^\mu\frac{\partial\tilde{a}^{\alpha\beta}}{\partial\tilde{x}^\mu} = 0, \tag{42}$$

$$4C_1\tilde{b}^\alpha - \tilde{b}^\mu\frac{\partial\tilde{\xi}^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu} + \tilde{\xi}^\mu\frac{\partial\tilde{b}^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu} = 0, \tag{43}$$

$$4C_1\tilde{c} + \tilde{\xi}^\mu\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{x}^\mu} = 0. \tag{44}$$

Тогда, согласно теореме 1, уравнение (1) допускает оператор (41) тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют уравнениям (42) — (44) для соответствующего набора вещественных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4.

Следующая теорема дает эффективный критерий, характеризующий уравнения класса (1), допускающие операторы вида (41).

Теорема 6. Уравнение класса (1) допускает оператор вида (41) тогда и только тогда, когда в пространстве $\mathbf{R}^2$ существует система координат (t^1, t^2), относительно которой для компонент метрического тензора и коэффициентов уравнения имеют место соотношения

$$g^{\alpha\beta}(t^1, t^2) = g^{*\alpha\beta}(t^2)\exp\{-2C_1t^1\}, \tag{45}$$

$$a^{\alpha\beta}(t^1, t^2) = a^{*\alpha\beta}(t^2)\exp\{-4C_1t^1\}, \tag{46}$$

$$b^\alpha(t^1, t^2) = b^{*\alpha}(t^2)\exp\{-4C_1t^1\}, \tag{47}$$

$$c(t^1, t^2) = c^*(t^2)\exp\{-4C_1t^2\}, \tag{48}$$

Доказательство этой теоремы существенно опирается на следующие две леммы, доказательство которых не представляет большой трудности и поэтому не приводится.

Лемма 1. Компоненты метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ пространства $\mathbf{R}^2$ в системе координат (t^1, t^2) имеют вида (45) тогда и только тогда, когда преобразования системы координат (t^1, t^2) в прямолинейной декартовой системе координат удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial t^1} = \tilde{\xi}^\alpha, \tag{49}$$

где функции $\tilde{\xi}^\alpha$ имеют вид (40).

Лемма 2. Компоненты тензора $a^{\alpha\beta}$, вектора b^α и скаляр C в системе координат (t^1, t^2) имеют вид соответственно (46) — (48) тогда и только тогда, когда преобразования системы координат (t^1, t^2) в прямолинейной декартовой системе координат удовлетворяют соотношениям (49), а компоненты $\tilde{a}^{\alpha\beta}, \tilde{b}^\alpha$ и $\tilde{c}$ удовлетворяют уравнениям (42) — (44), где функции $\tilde{\xi}^\alpha$ имеют вид (40).

Установленные групповые свойства уравнений класса (1) по отношению к группе гомотетий пространства $\mathbf{R}^2$ могут быть эффективно использованы для анализа и решения этих уравнений. Например, если уравнение данного класса допускает оператор вида (41), то с помощью преобразования системы координат, определяемого из выражений (49), его можно привести к эквивалентному уравнению с коэффициентами вида (45) — (48). В этом случае $\exp\{-4C_1 t^1\}$ является общим множителем, который можно сократить, и таким способом получить уравнение, эквивалентное первоначальному, но с коэффициентами, не зависящими от одной из независимых переменных. Это позволяет строить частные решения данного уравнения, используя метод разделения переменных и другие известные аналитические методы.

9. ПРИМЕР

Рассмотрим тонкую упругую прямоугольную пластинку на упругом основании под действием сжимающих — вдоль оси y и растягивающих — вдоль оси x, усилий с интенсивностью $\sigma = const \geq 0$; здесь приняты обозначения $x \equiv \tilde{x}^1$, $y \equiv \tilde{x}^2$. Формы потери устойчивости данной пластинки (в рамках гипотез Киргхоффа) описываются уравнением

$$\Delta\Delta w - \frac{\sigma}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k}{D}w = 0. \tag{50}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость пластинки ($D > 0$); $w(x, y)$ — функция прогиба; Δ — оператор Лапласа; k — винклеровская константа упругого основания.

Уравнение (50) принадлежит к уравнениям класса (1), причем здесь

$$\tilde{a}^{11} = -(\sigma/D), \ \tilde{a}^{12} = 0, \ \tilde{a}^{22} = \sigma/D, \ \tilde{b}^\alpha = 0, \ \tilde{c} = k/D. \tag{51}$$

Отсюда, с помощью формул (35), (8) и (10), получаем, что для данного уравнения $a^\alpha = 0$, $b^\alpha = 0$, $a = 0$, $q = \dfrac{k}{D} - \dfrac{\sigma^2}{4D^2}$. Здесь существуют две возможности: либо $k \neq \sigma^2/4D$, т.е. $q \neq 0$; либо $k \neq \sigma^2/4D$,, т.е.$q = 0$. В первом случае, согласно теореме 4, уравнение (50) допускает не более чем четырехпараметрическую группу, а во втором случае, согласно теореме 5, оно допускает шестипараметрическую группу, т.е. группу максимального порядка.

Система определяющих уравнений (12) — (17), с учетом соотношений (51), (18) и (19), сводится к следующим двум уравнениям:

$$f''' - (\sigma/2D)f' = 0, \tag{52}$$

$$q(f' + \overline{f}') = 0. \tag{53}$$

Если $\sigma = 0$, то общее решение уравнения (52) дается формулой

$$f = l_1 + l_2 z + l_3 z^2, \tag{54}$$

где l_1, l_2, l_3 — комплексные постоянные. Группа, определлемая функцией (54), согласно формулам (11) и (2), совпадает с группой, допускаемой бигармоническим уравнением (см. [9]). Уравнение (50) совпадает с этим уравнением при $\sigma = 0$ и $k = 0$. Если $\sigma = 0$, но $k \neq 0$, то $q \neq 0$, и тогда из уравнения (53) и формулы (54) следует, согласно формулам (11) и (2), что в данном случае уравнение (50) допускает трехпараметрическую группу движений в пространстве $\mathbf{R}^2$.

Если $\sigma \neq 0$, то общее решение уравнения (52) имеет вид

$$f = k_1 + k_2 e^{\lambda z} + k_3 e^{-\lambda z},$$

где k_1, k_2 и k_3 — комплексные постоянные и $\sigma = \sqrt{\sigma/2D} > 0$. Отсюда, используя формулы (11) и (2), находим, что в этом случае каждый допускаемый оператор имеет вид

$$X = \sum_{j=1}^{6} C_j X_j, \tag{55}$$

где C_j — вещественные постоянные и

$$X_1 = \partial/\partial x, \qquad X_2 = \partial/\partial y,$$

$$\begin{aligned}
X_3 &= e^{\lambda x}\cos(\lambda y)\partial/\partial x + e^{\lambda x}\sin(\lambda y)\partial/\partial y + \lambda e^{\lambda x}\cos(\lambda y)w\partial/\partial w,\\
X_4 &= -e^{\lambda x}\sin(\lambda y)\partial/\partial x + e^{\lambda x}\cos(\lambda y)\partial/\partial y - \lambda e^{\lambda x}\sin(\lambda y)w\partial/\partial w,\\
X_5 &= e^{-\lambda x}\cos(\lambda y)\partial/\partial x - e^{-\lambda x}\sin(\lambda y)\partial/\partial y - \lambda e^{-\lambda x}\cos(\lambda y)w\partial/\partial w,\\
X_6 &= e^{-\lambda x}\sin(\lambda y)\partial/\partial x + e^{\lambda x}\cos(\lambda y)\partial/\partial y - \lambda e^{-\lambda x}\sin(\lambda y)w\partial/\partial w.
\end{aligned}$$

Если $q \neq 0$, то из уравнения (53) следует, что в этом случае уравнение (50) допускает только двухпараметрическую группу сдвигов в пространстве $\mathbf{R}^2$. Если $q = 0$, то уравнение (53) удовлетворяется тождественно и, следовательно, в этом случае уравнение (50) допускает все операторы вида (55).

Рассмотрим алгебру Ли L_6 и соответствующую группу Ли G_6, которая допускается уравнениями (50) в случае $q = 0, \sigma \neq 0$. Так как здесь число независимых переменных $n = 2$, а число искомых функций $m = 1$, то представляют интерес инвариантные H-решения ранга $\rho = 1$, которые получаются для однопараметрических подгрупп $H \subset G_6$. Методом перебора (см. [1]) строится оптимальная система Θ_1 одномерных подалгебр алгебры L_6. Оказывается, что она содержит следующие одиннадцать классов неподобных подалгебр:

$$C_1X_1 + C_2X_2, \ X_3, \ X_5,$$

$$X_3 \pm X_5, \quad X_3 \pm X_6, \quad X_4 \pm X_5, \quad X_4 \pm X_6,$$

первому из которых соответствует бесконечное множество всех однопараметрических подгрупп группы сдвигов в пространстве $\mathbf{R}^2$.

В качестве примера рассмотрим инвариантные решения уравнения (50) с коэффициентами $q = 0$ и $\sigma \neq 0$, соответствующие операторам X_3 и $X_3 + X_5$.

Универсальный инвариант группы с оператором X_3 есть $J = (\lambda x - \ln |\sin \lambda y|, u/\sin \lambda y)$. Переменные разделяются и общий вид инвариантного $H(X_3)$-решения таков:

(56) $$u = u(t)\sin \lambda y, \quad t = \lambda x - \ln |\sin \lambda y| .$$

Подстановка в уравнение (50) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u^{IV}(t) + 2u'''(t) - u''(t) - 2u'(t) = 0$$

с общим решением

$$u(t) = A_1 + A_2e^t + A_3e^{-t} + A_4e^{-2t},$$

где A_1, A_2, A_3 и A_4 — вещественные постоянные. Отсюда, используя формулы (56), получаем все инвариантные $H(X_3)$-решения в явном виде

$$u = A_1 \sin \lambda y + A_2e^{\lambda x} + A_3e^{-\lambda x}\sin \lambda y + A_4e^{-2\lambda x}\sin^3 \lambda y.$$

Универсальный инвариант группы с оператором $X_3 + X_5$ есть $J = (\sin \lambda y/ch\lambda x, u/ch\lambda x)$. Переменные разделяются, и общий вид инвариантного $H(X_3 + X_5)$-решения таков:

(57) $$u = u(t)ch\lambda x, t = \sin \lambda y/ch\lambda x.$$

Подстановка (57) в уравнение (50) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(t^2-1)^2u^{IV}(t)+8t(t^2-1)u'''(t)+4(3t^2-1)u''(t)=0. \tag{58}$$

Уравнение (58) можно легко проинтегрировать, так как оно эквивалентно уравнению $[(t^2-1)^2u''(t)]''=0$. Общее решение дается формулой

$$u=B_1t\ln\frac{1+t}{1-t}+B_2\ln\frac{1+t}{1-t}+B_3t+B_4,$$

где B_1, B_2, B_3 и B_4 — вещественные постоянные. Отсюда, используя формулы (57), получаем все инвариантные $H(X_3+X_5)$-решения в явном виде

$$w=B_1\sin\lambda y\ln\frac{ch\lambda x+\sin\lambda y}{ch\lambda x-\sin\lambda y}+B_2ch\lambda x\ln\frac{ch\lambda x+\sin\lambda y}{ch\lambda x-\sin\lambda y}+B_3\sin\lambda y+B_4ch\lambda x.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
2. Вольмир, А. С. Устойчивость деформиреумых систем. М., Наука, 1967.
3. Власов, В. З., Н. Н. Леонтьев. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М., 1960.
4. Доннел, Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М. Наука, 1982.
5. Kerr, A.D. Elastic and Viscoelastic Foundation Models. — Trans. of ASME. Ser. E, **31**, 1964, No 3.
6. Амбарцумян, С. А., Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Наука, 1977.
7. Дубровин, Б. А., С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. М., Наука, 1979.
8. Фущич, В.И. О симетерии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики. — В: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. Киев, И-т математики АН УССР, 1983.
9. Овсянников, Л. В. Групповые свойства уравнений механики. — В: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., Наука, 1972.

Поступила на 14.04.1989 г.