
ГИДРОДИНАМИКА НА ТВЪРДИ И ТЕЧНИ ЧАСТИЦИ В ГРАДИЕНТНИ ТЕЧЕНИЯ

ЗАПРЯН ЗАПРЯНОВ

Запрян Запрянков. ГИДРОДИНАМИКА ТВЕРДЫХ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЧАСТИЦ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ.

В настоящей работе делается обзор некоторых основных проблем в гидромеханике твердых и деформируемых частиц (капли и пузыри), которые обтекаются сдвиговым вязким потоком. Обсуждаются поступательные и ротационные движения твердых сферических и несферических частиц, гидродинамическое взаимодействие частиц в многофазных системах, а также равномерные и неравномерные обтекания недеформируемых и деформируемых частиц и т.д. В дополнении приводится решение задачи обтекания сферической капли осесимметричным градиентным вязким потоком. В конце работы формулируются некоторые нерешенные до сих пор задачи в этой области.

Zapryan Zapryanov. FLUID MECHANICS OF RIGID OR FLUID PARTICLES IN SHEAR FLOWS.

The main purpose of this paper is to survey some basic problems in the field of fluid mechanics concerning rigid and fluid (drops and bubbles) particles in viscous shear flows. We discuss translation and rotation of spherical and nonspherical rigid or fluid particles, particle-particle interactions in multiphase systems, homogeneous and inhomogeneous shear flows, flow past undeformable and deformable fluid particles and so on. In addition to that we provide the solution of the problem of a spherical drop suspended in an axisymmetric shear flow. At the end of the paper some unsettled problems in the field of shear flows are pointed out.

Важен клас течения, които се изследват много интензивно през последните 15 – 20 години, са градиентните флуидни течения. Освен фундаментално те имат и важно приложно значение. Градиентни флуидни течения възникват в химическата и биологическата промишленост при движението на стените на различни апарати във флуидна среда. Примери за такива течения са течението на Кует между две равнинни или сферични стени, едната от които се движи успоредно на другата; течението на Поазьой в цилиндрична тръба, породено от зададен градиент на налягането; течението около критична точка, което се среща например при доближаването на частици до колектор; разтягащите и удължаващите течения при производството на влакнести или нишковидни полимерни материали и др.

Резултатите от изследванията на градиентните течения се използват при моделиране на различни дисперсни системи (суспензии, емулсии и др.), движението на еритроцитите, движението на тела в следи (зад други тела) или гранични слоеве и др.

Простите градиентни течения се характеризират от един макроскопичен параметър S , наречен коефициент на изменение на профила на скоростта. Сложните градиентни течения могат да се определят от два, три и т. н. параметри. Коефициентът на изменение на профила на скоростта S при простите градиентни течения има измерение, реципрочено на времето. Той участва в израза за числото на Рейнолдс

$$Re = \frac{a^2 S}{\nu},$$

което е основен динамичен параметър в хидродинамиката на градиентните течения (a е характерен размер на течението, а ν — кинематичният вискозитет на флуида).

Първите фундаментални резултати в изследването на градиентните течения са получени от Айнщайн [1], който пресмятайки ефективния вискозитет на суспензия от еднакви сферични частици (1906 и 1911 г.), решава задачата за определяне на хидродинамичното взаимодействие на просто градиентно течение и неутрално суспендирана в него сферична частица, т. е. частица, на която не действа силата на тежестта или други външни сили. В този случай на частицата въздейства само градиентното течение, което създава ненулеви напрежения върху повърхността ѝ.

Теорията на Айнщайн бе обобщена от Джефри [2] за суспензия от елипсоидални частици, при които важна роля играе ориентацията им относно равнината от градиентното течение, имаща скорост, равна на нула. Поради различната геометрия на елипсоида в сравнение със сферата изследванията на Джефри намериха приложения в реологията на анизотропни дисперсни и полимерни системи, течните кристали, теченията с двойно пречупване и др.

Изследванията на Джефри се отнасят за просто градиентно течение,

зададено в равнината Oxy със скорости $u = Sy$, $v = 0$, $w = 0$. Той установява, че напрежението, индуцирано от течението върху повърхността на ротационния елипсоид, може еквивалентно да се замени с действието на две двоици — едната се стреми да застави частицата да се установи в потока; така че оста ѝ да бъде успоредна на оста Oz , а другата — оста ѝ да лежи в равнината Oxy .

Ако ротационният елипсоид има уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

където $b = c$, то под действието на двете двоици върховете му описват в сферични координати (r, θ, φ) траектории с уравнение

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{a^2 b^2}{k^2 (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)}.$$

Тук k е константа, която зависи от ориентацията на частицата, като при $k = 0$ голямата ос a се върти в равнината Oxy , а при $k = \infty$ същата ос е успоредна на Oz . За всяка друга междинна стойност на k ротационният елипсоид се върти около оста a с ъглова скорост

$$\omega = \frac{S}{2} \cos \theta.$$

От тази формула следва, че при $k = 0$ получаваме $\omega = 0$, а при $k = \infty$ —

$$\omega = \frac{S}{2}.$$

Изследванията на Джефри, извършени посредством уравненията на Стокс, показват, че при обтичането на ротационен елипсоид от просто градиентно течение не се забелязва тенденция оста му да се разположи в някакво предпочитано положение относно несмутеното движение на флуида. Това е недостатък на модела, с който си служи Джефри. Моментът на елипсоида, изчислен в стоксово приближение, е равен на нула независимо от ориентацията му по отношение на посоката на обтичащия поток. Подобен недостатък на уравненията на Стокс се наблюдава и при ексцентрично разположена вътре във вертикален кръгов цилиндър сферична частица, която пада под действието на теглото си. При движението си сферата не изпитва сила, която да я принуди наред с движението си надолу да мигрира в радиално направление, но това противоречи на експерименталните наблюдения.

През 1923 г. Факсен [3, 4] разработва метод за решаване на задачи от обтичане на сфера, намираща се между две успоредни равнини. Той изхожда от фундаменталното решение на уравнението на Лаплас за налягането

$$\Delta p = 0,$$

което има вида

$$p = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Представяйки това решение в интегрална форма, той получава

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp [i(\alpha x + \beta y) - k|z|]\} \frac{d\alpha d\beta}{k},$$

където $i = \sqrt{-1}$, α и β са интеграционни променливи и $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Факсен използва тази функция и нейните частни производни относно декартовите координати за изразяване на общото решение на уравненията на Стокс за сфера в безкраен флуид в декартови координати

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp [i(\alpha x + \beta y) - k|z|]\} \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} g_2 + \frac{2g_1}{k} \right. \\ &\quad \left. - \frac{g_1 \alpha^2}{k^3} (k|z| + 1) + \frac{\alpha^2 z}{k} g_3 \right\} d\alpha d\beta; \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp [i(\alpha x + \beta y)]\} i\beta \cdot \left\{ \frac{g_2}{k} + \frac{i}{k^3} g_1 (k|z| + 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\alpha x}{k} g_3 \right\} d\alpha d\beta; \\ w &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp [i(\alpha x + \beta y) - k|z|]\} \cdot \left\{ -\frac{z}{|z|} g_2 - \frac{zi\alpha}{k} g_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\alpha}{k} g_3 k|z| + 1 \right\} d\alpha d\beta; \\ p &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp [i(\alpha x + \beta y) - k|z|]\} \left\{ -g_1 + \frac{z}{|z|} k g_3 \right\} d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

където g_1, g_2, g_3 са производни функции на α и β . Тъй като Факсен използва метода на отражението, това представяне е удобно за удовлетворяване на граничните условия поотделно върху сферата и върху равнините. От тях се определят функциите g_1, g_2, g_3 .

За съпротивлението на сфера с радиус a , движеща се със скорост U успоредно на една равнина, във вискозен флуид след второто отражение Факсен получава

$$W_x = \frac{-6\pi\mu a U}{1 - \frac{9}{16} \frac{a}{l} + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{l}\right)^3 - \frac{45}{256} \left(\frac{a}{l}\right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{l}\right)^5},$$

където l е разстоянието от центъра на сферата до равнината. Ако сферата може да се върти, ъгловата ѝ скорост ще бъде

$$\omega = \frac{3U}{32a} \left(\frac{a}{l}\right)^4 \left(1 - \frac{3a}{8l}\right).$$

Системни изследвания на обтичането на сфера от градиентно вискозни течения между две успоредни равнини извършва Вакия [5, 6]. Използувайки развития от Факсен метод, Вакия разглежда два случая: а) течение на Поазьой между две неподвижни равнини; б) течение на Кует, при което едната равнина е неподвижна, а другата се движи.

Да означим с $2L$ разстоянието между двете равнини и в двата случая и да предположим, че центърът на сферата е разположен на разстояние $l = \frac{L}{2}$ от едната стена. Вакия взема началото на координатната система да съвпада с центъра на сферата и разглежда течение между двете равнини от вида

$$u_{\infty} = U - \frac{2U}{3l}z - \frac{U^*}{3l^2}z^2, \quad v_{\infty} = w_{\infty} = 0,$$

където U е скоростта на флуида върху равнината $z = 0$. За силата на съпротивлението успоредно на равнините той получава

$$W_x = \frac{6\pi\mu aU \left[1 - \frac{1}{9} \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]}{1 - 0,6526 \frac{a}{l} + 0,3160 \left(\frac{a}{l}\right)^3 - 0,242 \left(\frac{a}{l}\right)^4},$$

а за момента

$$T_y = \frac{8}{3}\pi\mu a^2U \cdot \frac{a}{l} \left[1 + 0,0758 \left(\frac{a}{l}\right) + 0,049 \left(\frac{a}{l}\right)^3\right],$$

където a е радиусът на сферата.

Предполагайки, че по-близката до сферата равнина е неподвижна, а по-далечната се движи със скорост U , във втория случай Вакия разглежда следното несмутено течение между равнините:

$$u_{\infty} = \frac{U}{4} + \frac{U}{4l}z, \quad v_{\infty} = w_{\infty} = 0.$$

Като използва координатна система, неподвижно свързана със сферата, за съпротивлението той получава

$$F_x = \frac{3/2\pi\mu aU}{1 - 0,6526 \left(\frac{a}{l}\right) + 0,4003 \left(\frac{a}{l}\right)^3 - 0,297 \left(\frac{a}{l}\right)^4},$$

а за момента —

$$T_y = 4\pi\mu a^2U \frac{a}{l} \left[1 + 0,0506 \frac{a}{l} + 0,033 \left(\frac{a}{l}\right)^2\right].$$

Интересни теоретични изследвания на градиентни течения извършва Бредертън [7], който прилага метода за срastване на асимптотичните

разлагания за решаване на задачата за неутрално суспендирана цилиндрична частица в просто градиентно течение. Освен това Бредертън [8] разглежда и други частици с по-сложна форма в градиентни течения и установява съществуването и на други движения (моди) в допълнение към изучените от Джефри и Факсен.

Изследвано е и влиянието на цилиндрична стена върху движението на твърди частици във вискозен флуид. Изборът на този вид граница (стена) е свързан с това, че цилиндричната повърхнина обгражда напълно както частицата, така и флуидния поток.

През 1907 г. Ладенбург [9] разглежда задачата за движение на твърда сфера с постоянна скорост U в направление на оста на кръгова цилиндрична тръба. Като използва приближен метод, той получава за съпротивлението, което изпитва сферата при движението ѝ в тръбата, формулата

$$(1) \quad \frac{W}{6\pi\mu aU} = 1 + 2,4 \frac{a}{r_0}.$$

Тук a е радиусът на частицата, а r_0 — радиусът на сечението на кръговата тръба. Използвайки метода си, Факсен [10] решава същата задача и получава също, че частицата изпитва по-голямо съпротивление, отколкото при движението ѝ в неорганичен вискозен флуид. С това той потвърждава извода, направен от Ладенбург, за задържащото влияние на цилиндричната стена върху движението на частицата. Като използва метода на Факсен, Вакия [11] решава задачата за движение на сфера по оста на кръгова цилиндрична тръба, в която има развито течение на Поазьой. За съпротивлението, което изпитва сферата, той получава

$$(2) \quad \frac{W}{6\pi\mu aU} = \frac{1 - \frac{2}{3} \frac{a}{r_0}}{1 - 2,104 \frac{a}{r_0} + 2,09 \frac{a}{r_0} - 1,11 \left(\frac{a}{r_0}\right)^2}.$$

За сравнение с резултатите на Ладенбург той решава и задачата, когато сферата се движи по оста на тръбата с постоянна скорост U и получава по-точната в сравнение с (1) формула

$$(3) \quad \frac{W}{6\pi\mu aU} = 1 + 2,1 \frac{a}{r_0}.$$

Извършвайки експерименти за бавно движение на твърда сферична частица, неутрално (свободно) суспендирана в течение на Поазьой в кръгова цилиндрична тръба, през 1961 и 1962 г. Сегре и Зилберберг [12, 13] наблюдават странична миграция на частицата, чийто център се установява в равновесно положение, отдалечено на около 0,6 радиуса от оста на цилиндъра, независимо от началното ѝ положение относно оста. Ако

частицата е суспендирана близо до стената, тя мигрира навътре, а ако е суспендирана близо до оста, тя мигрира в посока към стената. Този ефект на странична миграция бе потвърден и в изследванията на други автори [14, 15, 16], които установиха относително неголяма чувствителност към големината на числото на Рейнолдс (пресметнато, като се използва дължината на диаметъра на тръбата) и отношението на диаметъра на тръбата $2r_0$ и диаметъра на частицата $2a$.

При движение на разрежена суспензия от неутрално плуващи сферични частици във флуид в кръгла цилиндрична тръба Сегре и Зилберберг констатират наличието на напречни сили, стремящи се да преместят частиците, които са близо до оста, към стената и обратно — частиците, които са до стената — към центъра на тръбата. В резултат на действието на тези сили независимо от началното си положение частиците се концентрират в пръстеновиден слой, който е разположен приблизително в средата между оста и стената на тръбата.

Опитите на Сегре и Зилберберг са продължени от Смол и Ейхорн [17], Дей и Генети [18], Денсън и съавтори [19] и др. за твърди частици, които не са неутрално суспендирани в течението на Поазьой в кръгова тръба, а имат по-голяма или по-малка плътност от плътността на заобикалящия ги флуид. От изследванията на тези автори следва, че ако плътността на сферичната частица (намираща се в течение на Поазьой, насочено надолу във вертикална кръгова тръба) е по-голяма от плътността на заобикалящия я флуид, имаме наслагване на скоростта на сферата, предизвикана от силата на тежестта и носещата скорост на течението и миграцията на частицата l към стената на тръбата. Ако плътността ѝ е по-малка от плътността на флуида, споменатите две скорости имат противоположни посоки и миграцията на частицата е към оста на тръбата.

Теоретичното обяснение на резултатите от тези експерименти среща големи затруднения. Използвайки метода за срастване на асимптотичните разлагания, Рубинов и Келер [20] показват, че движещата се и едновременно с това въртяща се сфера в неподвижен вискозен флуид изпитва сила, която е перпендикулярна на посоката на движение, т.е. изпитва подемна сила

$$\bar{F}_L = \pi a^3 \rho \bar{\Omega} \times \bar{U} [1 + O(Re)].$$

Тук \bar{U} е скоростта на транслационното движение, $\bar{\Omega}$ — ъгловата скорост, ρ — плътността на флуида и $Re = \frac{\rho U a}{\mu}$ — числото на Рейнолдс.

Като използват този резултат, Рубинов и Келер правят опит да обяснят теоретично експериментите на Сегре и Зилберберг, но получават, че страничната сила е насочена така, че свободно суспендираната в поазьоевото течение сферична частица винаги мигрира към оста на тръбата. По този начин дори с привличането на конвективните членове в уравненията на движение не може да се даде задоволително теоретично обяснение на посочения ефект. Бредертън [8] изследва теоретично миграцията на различни по форма твърди частици в течения на Поазьой и изказва

предположението, че това влияние е свързано с инерционните членове в уравненията на Навие — Стокс. В експериментите на Сегре и Зилберберг (1961, 1962 г.) числото на Рейнолдс с характерен линеен размер — диаметъра на тръбата — $2r_0$, е около 30, макар че числото на Рейнолдс, пресметнато чрез диаметъра на сферичната частица, е по-малко от единица. Голдсмит и Мейсън [21] разглеждат свободно суспендирани сферични частици в течение на Поазъой, когато числото на Рейнолдс $Re = \frac{2r_0 \cdot v\rho}{\mu} \ll 1$, и установяват експериментално, че няма миграция при число на Рейнолдс $Re = \frac{2r_0 \cdot v\rho}{\mu}$, по-малко от единица. Те не наблюдават миграция и при свободно суспендирани твърди частици с форма на дискове и пръти с кръгово сечение.

За някои частици с по-особена форма обаче Бредертън установява, че и при $Re \ll 1$ съществува странична миграция. Същият резултат за наличие на миграция и в условията на бавно вискозно движение на деформирани капки е получен експериментално от Голдсмит и Мейсън [21]. Анализирайки критично обсъжданото явление, Сафмън [22] изказва предположение, че при някои условия могат да се окажат важни не само инерционните, но и ненютоните ефекти.

Като използват бисферични координати, Голдман, Кокс и Бренер [23] получават точно решение за бавното транслационно движение на неутрално суспендирана твърда сферична частица в течение на Кует. Намереното решение е валидно за малки числа на Рейнолдс и произволно отношение на разстоянието на сферата до равнината (без случая на допиране на частицата до равнината) и радиуса ѝ.

Точно решение в стоксово приближение на задачата за обтичане от градиентен вискозен поток на сфера, допираща се до равнина, е дадено от Нил [24] през 1968 г. Обобщавайки метода на Дийн и О'Нил [25], за решаване на пространствени задачи за обтичане от равномерен вискозен поток на сфера близо до равнина или две сфери, Вакия [26] решава задачата за две сферични частици, суспендирани в градиентен вискозен поток, който е насочен в направление, перпендикулярно на оста на центровете им. Тъй като Вакия разглежда само частния случай (оста на центровете на сферите лежи в равнината на градиентното течение и има скорост, равна на нула), през 1971 г. Дейвис [27] разглежда общия случай, при който оста на двете сфери и равнината с нулева скорост в градиентното течение са в общо положение. Анализ на траекториите за движение на сфери с равни радиуси в градиентно вискозно течение е направен от Лин и др. [28]. По-сложният случай, когато наред с градиентния поток на сферите действа и допълнителна сила на привличане от типа на Лондон, е разгледан от Картис и Носкинг [29].

Системно изследване на хидродинамичното взаимодействие на две свободно движещи се сфери в градиентен вискозен поток е извършено от Бетчелор и Грийн [30]. От техните резултати като частен случай се полу-

чават резултатите на Дейвис [27] и на Лин и др. [28]. Точно решение на уравненията на Стокс за задачата за две допиращи се сфери, суспендирани в градиентно вискозно течение, е получено от Вакия [31] през 1971 г. Две години по-късно Нир и Акривос [32] разглеждат по-общия случай, когато допиращите се сфери имат различни радиуси. Те пресмятат силите и моментите, действащи на двете частици, и използват получените резултати при моделирането на разреждени суспензии.

В [33] е решена класическата задача за обтичане на сфера от равномерен вискозен поток при малки и крайни числа на Рейнолдс. Тук ще разгледаме задачата за обтичане на сфера от прост градиентен поток в стоксово приближение. При липса на външни сили уравненията на Стокс в декартови координати (x, y, z) имат вида

$$(4) \quad \mu \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Чрез диференциране на уравненията (4) и използване на уравнението на непрекъснатостта

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

получаваме, че налягането удовлетворява уравнението

$$(6) \quad \Delta p = 0.$$

Тогаво решението $p(x, y, z)$ на (6) може да се запише в ред по сферичните функции P_n :

$$(7) \quad p = \sum_n P_n,$$

като отделните членове на това разлагане са независими. За да изразим компонентите на скоростта u, v, w посредством P_n , полагаме

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= Ar^2 \frac{\partial P_n}{\partial x} + Br^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_n}{r^{2n+1}} \right), \\ v &= Ar^2 \frac{\partial P_n}{\partial y} + B^{2n+3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P_n}{r^{2n+1}} \right), \\ w &= Ar^2 \frac{\partial P_n}{\partial z} + B^{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_n}{r^{2n+1}} \right), \end{aligned}$$

където $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а A и B са константи. Константата A се определя така, че изразът $Ar^2 \frac{\partial P_n}{\partial x}$ да удовлетворява първото уравнение на (4).

Тъй като

$$\Delta \left(r^2 \frac{\partial P_n}{\partial x} \right) = r^2 \Delta \left(\frac{\partial P_n}{\partial x} \right) + 4 \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial P_n}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial P_n}{\partial x} \Delta(r^2) = 2(2n+1) \frac{\partial P_n}{\partial x},$$

то за A получаваме

$$A = \frac{1}{2(2n+1)\mu}.$$

Лесно се проверява, че при този избор на константата A изразите $Ar^2 \frac{\partial P_n}{\partial y}$ и $Ar^2 \frac{\partial P_n}{\partial z}$ удовлетворяват съответно второто и третото уравнение на (4). Константата B определяме, като заместим (8) в уравнението на непрекъснатостта (5):

$$B = \frac{n}{(n+1)(2n+1)(2n+3)\mu}.$$

Общото решение на (4) и (5) се получава, като към общото решение на хомогенната система

$$(9) \quad \Delta u^h = 0, \quad \Delta v^h = 0, \quad \Delta w^h = 0,$$

$$(10) \quad \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial v^h}{\partial y} + \frac{\partial w^h}{\partial z} = 0$$

прибавим едно частно решение на нехомогенната система (4), (5).

От (9) следва, че функциите u^h , v^h , w^h (аналогично на налягането) могат да се представят във вид на ред посредством сферични функции, т.е.

$$u^h = \sum_n u_n^h, \quad v^h = \sum_n v_n^h, \quad w^h = \sum_n w_n^h.$$

Тук u_n^h , v_n^h , w_n^h удовлетворяват уравнението на непрекъснатостта (10) за всяко n , тъй като са линейно независими.

Като диференцираме уравнението

$$\frac{\partial u_n^h}{\partial x} + \frac{\partial v_n^h}{\partial y} + \frac{\partial w_n^h}{\partial z} = 0$$

относно x и го прибавим към първото уравнение на (9), получаваме уравнение, което може да се запише във вида

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_n^h}{\partial x} - \frac{\partial u_n^h}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_n^h}{\partial z} - \frac{\partial w_n^h}{\partial x} \right).$$

По аналогичен начин получаваме и уравненията

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w_n^h}{\partial y} - \frac{\partial v_n^h}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_n^h}{\partial x} - \frac{\partial u_n^h}{\partial y} \right),$$

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_n^h}{\partial z} - \frac{\partial w_n^h}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_n^h}{\partial y} - \frac{\partial v_n^h}{\partial z} \right).$$

Равенствата (11) – (13) показват, че съществува функция $\chi_n(x, y, z)$, за която са в сила равенствата

$$(14) \quad \frac{\partial \chi_n}{\partial x} = \frac{\partial w_n^h}{\partial y} - \frac{\partial v_n^h}{\partial z}; \quad \frac{\partial \chi_n}{\partial y} = \frac{\partial u_n^h}{\partial z} - \frac{\partial w_n^h}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \chi_n}{\partial z} = \frac{\partial v_n^h}{\partial x} - \frac{\partial u_n^h}{\partial y}.$$

Следователно

$$\frac{\partial^2 \chi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial z^2} = 0,$$

т.е. функцията $\chi_n(x, y, z)$ е също сферична функция от степен n .

Лесно се установява, че изразът $xu_n^h + yv_n^h + zw_n^h$ е сферична функция от $(n+1)$ -ва степен. От (11) – (13) следват

$$(15) \quad z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} = x \frac{\partial u_n^h}{\partial x} + y \frac{\partial u_n^h}{\partial y} + z \frac{\partial u_n^h}{\partial z} + u_n^h$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} (xu_n^h + yv_n^h + zw_n^h)$$

и две други аналогични уравнения, които се получават от (15) чрез циклична замяна на x, y, z и u_n^h, v_n^h, w_n^h . След известни преобразувания от (9) – (10) получаваме

$$(16) \quad \Delta [xu_n^h + yv_n^h + zw_n^h] = 0.$$

Следователно може да запишем

$$(17) \quad xu_n^h + yv_n^h + zw_n^h = \Phi_{n+1},$$

където Φ_{n+1} е сферична функция от $(n+1)$ -ва степен. Като заместим (17) в (16), за неизвестната функция u_n^h намираме

$$(18) \quad (n+1)u_n^h = \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z}.$$

Аналогично за v_n^h и w_n^h получаваме

$$(19) \quad (n+1)v_n^h = \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial y} + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial x},$$

$$(20) \quad w_n^h = \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial z} + y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial y}.$$

Имайки предвид, че шом функциите Φ_{n+1} и χ_n са сферични, то и $(n+1)\Phi_{n+1}$, $(n+1)\chi_n$ също са сферични функции, може без ограничение на общността да изоставим в (18), (19) множителя $(n+1)$. Така получаваме, че решенията на хомогенната система (9), (10) могат да се запишат във вида

$$(21) \quad \begin{aligned} u_n^h &= \sum \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right), \\ v_n^h &= \sum \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right), \\ w_n^h &= \sum \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Като вземем предвид изразите за A и B , за общото решение на хомогенната система (4), (5) получаваме

$$(22) \quad u = \frac{1}{\mu} \sum_n \left[\frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial P_n}{\partial x} + \frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{P_n}{r^{2n+1}} \right] + \sum_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \sum_n \left(z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right),$$

$$(23) \quad v = \frac{1}{\mu} \sum_n \left[\frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial P_n}{\partial y} + \frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{P_n}{r^{2n+1}} \right] + \sum_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} + \sum_n \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right),$$

$$(24) \quad w = \frac{1}{\mu} \sum_n \left[\frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial P_n}{\partial z} + \frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{P_n}{r^{2n+1}} \right] + \sum_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + \sum_n \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right).$$

От (21) – (24) следва, че полученото решение за компонентите на скоростта се изразява чрез функциите P_n , Φ_n и χ_n . Трите суми в дясната страна на уравненията (21) – (24) характеризират съответно влиянието на разпределението на налягането, потенциалния и вихровия характер на обтичането на твърдата частица. Във векторен вид уравненията (21) – (24) се записват по-компактно така:

$$(25) \quad \vec{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\nabla \chi_n \times \vec{r}) + \nabla \Phi_n + \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r^2 \nabla P_n - \frac{n}{(n+1)(2n+3)} r P_n \right].$$

За да приложи полученото общо решение (25) за решаване на задачата за обтичане на твърда сфера от градиентен поток, Айнщайн избира координатна система така, че началото ѝ да съвпада с центъра на частицата и оста x да е насочена в направлението на скоростта (\vec{v}_∞) в безкрайност. Тогава граничните условия се записват така:

$$(26) \quad u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad r = a;$$

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty(\alpha y, 0, 0) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty,$$

където a е радиусът на сферата и α е единствената ненулева компонента на тензора на скоростта на деформацията за разглежданото течение. При този избор на координатната система членовете в (25), съдържащи κ_n , отпадат, защото осите ѝ съвпадат с главните оси на деформацията. Като отчита това, след известни преобразувания Айнщайн [1] намира, че на нула не са равни само функциите

$$\Phi_2 = \frac{1}{4}\alpha(x^2 - y^2), \quad \Phi_{-3} = B_{-3}a^5 \frac{x^2 - y^2}{r^2},$$

$$P_{-3} = \mu A_{-3} \frac{x^2 - y^2}{r^5},$$

където A_{-3} и B_{-3} са константи. След известни преобразувания от (21) - (24) следва

$$(27) \quad u = \frac{1}{2}A_{-3}a^3 x \frac{x^2 - y^2}{r^5} + B_{-3}a^5 \left[-\frac{5x}{r^4}(x^2 - y^2) + \frac{2x}{r^2} \right] + \frac{\alpha x}{2};$$

$$v = \frac{1}{2}A_{-3}a^3 y \frac{x^2 - y^2}{r^5} + B_{-3}a^5 \left[-\frac{5y}{r^4}(x^2 - y^2) - \frac{2y}{r^2} \right] + \frac{\alpha y}{2};$$

$$w = \frac{1}{2}A_{-3}a^3 z \frac{x^2 - y^2}{r^5} + B_{-3}a^5 \left[-\frac{5z}{r^4}(x^2 - y^2) \right].$$

От граничните условия (26) намираме ,

$$A_{-3} = -\frac{5}{2}\alpha, \quad B_{-3} = -\frac{1}{4}\alpha a^{-3}.$$

Замествайки в (27), за компонентите на скоростта окончателно се получава

$$(28) \quad u = \frac{\alpha x}{2} \left[-\frac{5}{2} \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{a^2}{r^2} \right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} + 1 \right];$$

$$v = \frac{\alpha y}{2} \left[-\frac{5}{2} \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{a^2}{r^2} \right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} - 1 \right];$$

$$w = \frac{5\alpha z}{4} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^3}{r^3} \right) \frac{x^2 - y^2}{r^2}.$$

Известно е, че силата, действаща на сфера, обтичана от равномерен безкраен вискозен флуид, се дава от формулата на Стокс

$$(29) \quad \vec{F} = 6\pi\mu a \vec{v}_\infty,$$

където $\vec{v}_\infty = \text{const}$. През 1924 г. Факсен [34] обобщава (29) за случая на твърда сфера, обтичана от стационарен прост градиентен вискозен поток. Той установява, че теоремата за силата, с която действа стационарен вискозен неравномерен поток върху твърда сфера, намираща се в него, се дава с формулата

$$(30) \quad \vec{F} = 6\pi\mu a \frac{1}{4\pi a^2} \int_S \vec{v}(r) d\sigma = 6\pi\mu a (\vec{v}_\infty)^S.$$

Тук $\vec{v}_\infty(r)$ е скоростта на неравномерния поток в безкрайност, S е повърхността на сферичната частица, а

$$(31) \quad (\vec{v}_\infty)^S = \frac{1}{4\pi a^2} \int_S \vec{v}_\infty(r) d\sigma$$

е средната скорост на повърхността S .

От (30) при $\vec{v}_\infty(r) = \text{const}$, т.е. при равномерно обтичане, се получава като частен случай формулата на Стокс (29).

Поведението на флуидните частици (капки и мехури), суспендирани в градиентни течения, се различава много от поведението им в равномерните в безкрайност течения. Докато при бавни неградиентни течения (т.е. равномерни течения при малки числа на Рейнолдс) сферичните капки и мехури запазват формата си, ако имат малки размери или голямо повърхностно напрежение, то при силно градиентни течения това не е така. Формата на флуидните частици при втория вид течения зависи не само от обемните или междуфазовите свойства на флуида, но и от градиента на профила на скоростта S на течението. При малки стойности на S формата на флуидните частици е близка до сферичната, а при много големи S настъпват извънредно силни деформации, при които флуидната частица става неустойчива и се разделя на две еднакви капки или няколко по-малки сателитни капки.

Ще отбележим, че макар уравненията на Стокс и съответните гранични условия да са линейни, тъй като формата на капките (мехурите) се записва с нелинейното уравнение

$$f\left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{a}, \frac{z'}{a}, C_a, \frac{\hat{\mu}}{\mu}\right) = 0,$$

разглежданият проблем е нелинеен. Именно поради тази нелинейност на проблема за разлика от обтичането на твърди частици (с известни граници) от градиентен вискозен поток при флуидните частици досега не са получени точни решения в случая, когато формата им не е сферична.

Първите фундаментални резултати в изследване поведението на капка в градиентно течение на Кует и хиперболично вискозно течение, като се използват уравненията на Стокс, извършва Тейлор [35, 36] — съответно през 1932 и 1934 г. Удовлетворявайки граничните условия за непрекъснатост на скоростта и тангенциалното напрежение върху зададена сферична междуфазова граница, той пресмята скоростта и нормалните напрежения в областта на течението. Като използва уравнението за баланса на нормалните напрежения, Тейлор намира следната форма на флуидната частица:

$$r = a \left(1 + \frac{2D}{a^2} xy \right),$$

където D е параметър на деформацията, за който имаме

$$D = \frac{L - B}{L + B} = \frac{Sa\mu}{\sigma} \frac{19k + 16}{16k + 16} \ll 1.$$

Тук $B = a(1 - D)$, $L = a(1 + D)$, $k = \frac{\hat{\mu}}{\mu}$ ($\hat{\mu}$ и μ са вискозитетите на флуидите вътре и вън от капката).

Полученият резултат от Тейлор показва, че при малки деформации формата на капката от сферична преминава в елипсоидна. Най-голямата ос L и най-малката ос B на елипсоида [33] лежат в равнината Oxy , заключвайки ъгъл от 45° с осите Ox и Oy . Удължението на формата на капката е в посока от третия към първия квадрант, а свиването — от втория към четвъртия. Третата ос на елипсоида лежи на оста Oz и е равна на радиуса a на първоначалната форма на капката. Това уравнение е експериментално потвърдено за течение на Кует и хиперболичното градиентно течение от самия Тейлор [36] и Рамшид и Мейсън [37], а за течение на Поазьой — от Голдсмит и Мейсън [38].

Установено е, че при стойности на малкия параметър $\epsilon > 0,2$ започват да настъпват значителни отклонения от предсказаната от теорията елипсоидна форма. При $\epsilon = 0,5$ вискозните сили, които водят до промяна на формата на капката, превишават силите на повърхностното напрежение, стремящи се да я запазят, и тя се разрушава, т.е. губи устойчивост. При тези стойности на ϵ зависимостта на формата на капката от повърхностното напрежение става нелинейна и както посочват Рамшид и Мейсън [37], преди разрушаването тя има различен вид за различните видове градиентни течения.

Тейлор [36] изследва експериментално случая на силно вискозни капки при $\epsilon \rightarrow \infty$ ($\eta^{-1} \rightarrow 0$). Когато ϵ е голямо, Тейлор разглежда в първо приближение формата на капката като функция само на отношението на вискозитетите k и отново намира, че капката приема формата на елипсоид с оси, успоредни на линиите на тока на несмутеното движение на флуида.

Като се проектира в равнината, съдържаща неравномерната част на градиентното течение, уравнението на деформираната повърхност на кап-

ката добива вида

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{5}{4}k^{-1} \cos 2\Phi + O(k^{-1}),$$

където Φ е ъгълът на градиента на скоростта на течението и линиите на тока.

Както показват експериментите на Тейлор [36] и Рамшид и Мейсън [37], при $k > 5$ капката се удължава във вид на дълга нишка при течение на Кует и се разрушава при хиперболично течение. Сложността на изследвания нелинеен проблем затруднява точното пресмятане на формата на флуидните частици в градиентни течения, поради което той досега не е решен. Голям принос в това направление е изследването на Кокс [38], който използва за малък параметър величината

$$\frac{1}{\eta} = \frac{\mu a S}{\sigma}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{k} = \frac{\mu}{\hat{\mu}}.$$

Той изследва хиперболично течение, в което импулсивно от покой тръгва флуидна капка, чиято форма се приближава към равновесното си положение при неограничено растене на времето.

Ако началото на сферичната координатна система (r, θ, φ) съвпада с центъра на капката, за уравнението на формата на флуидната частица имаме $r = a[1 + F(\theta, \varphi)]$, където F се разлага посредством сферичните функции F_n във вида

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n F_n(\theta, \varphi).$$

Кокс търси скоростта и налягането във вид на ред по степените на малкия параметър

$$\vec{v}(r, \theta, \varphi, \epsilon) = \vec{v}_0(r, \theta, \varphi) + \epsilon \vec{v}_1(r, \theta, \varphi) + \epsilon^2 \vec{v}_2(r, \theta, \varphi) + \dots,$$

$$p(r, \theta, \varphi, \epsilon) = p_0(r, \theta, \varphi) + \epsilon p_1(r, \theta, \varphi) + \epsilon^2 p_2(r, \theta, \varphi) + \dots$$

Допускайки, че при малки деформации сферичната капка с радиус a приема формата на триосен елипсоид с оси B , L и a , за величината D той получава

$$D = \frac{L - B}{L + B} = \frac{5(19k + 16)}{4(\eta + 1)\sqrt{(19k)^2 + (20\eta)^2}} \ll 1.$$

Тя е в сила или при $\eta \gg 1$ и $k = O(1)$, или при $k \gg 1$ и $\eta = O(1)$. Тук се предполага, че малката ос (B) и голямата ос (L) лежат в равнината, определяща градиентното течение, докато третата ос (a) е перпендикулярна на тях.

Да изберем осите Ox и Oz на декартовата координатна система да са успоредни съответно на вихровите и токовите линии на несмутеното градиентно течение и най-малката и най-голямата ос на елипсоида да лежат

в равнината Oyz . Тогава ориентацията на флуидната частица относно градиентното течение ще бъде определена от ъгъл α , заключен между оста Oy и най-голямата ос на елипсоида. За малки деформации Кокс получава

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{19k}{20\eta} \right).$$

Тъй като $\frac{k}{\eta} = \frac{\hat{\mu}Sa}{\sigma}$, от тази формула следва, че $\alpha = 45^\circ$ при $S \rightarrow 0$ и капката е ориентирана под ъгъл 45° относно линиите на тока, а $\alpha = 90^\circ$ при $S \rightarrow \infty$ и голямата ос е насочена в направление на токовите линии на несмутеното течение.

Използвайки метода на Кокс, Хетсрони и Хабер [39, 40] изследват динамиката на деформируема капка, суспендирана в неограничено градиентно стоксово течение. Чрез метода на отражението Хетсрони и др. [41] решават приближено задачата за аксиално движение на слабо деформируема капка в кръгова тръба. Ако R_0 е радиусът на тръбата, b — разстоянието на капката до оста на тръбата, a — еквивалентният радиус на флуидната частица, ρ и $\hat{\rho}$ — плътностите на флуидите вън и вътре в нея и k — отношението на вискозитетите μ и $\hat{\mu}$, за скоростта на движение на капката в тръбата в направление на течението на Поазьой авторите на [42] получават

$$U = \frac{2(\hat{\rho} - \rho)ga^2}{9\mu} \frac{1+k}{\frac{2}{3}+k} \left[1 - \frac{2+3k}{3(1+k)} \frac{a}{R_0} f\left(\frac{b}{R_0}\right) \right] + U_0 \left[1 - \left(\frac{b}{R_0}\right)^2 - \frac{2k}{2+3k} \left(\frac{a}{R_0}\right) \right] + O\left(\frac{a}{R_0}\right)^3,$$

където $f\left(\frac{b}{R_0}\right)$ е функция, табулирана от Фамуларо [42, таблица 1, с. 309]. Хабер и Хетсрони [40] пресмятат в течение на Поазьой скоростта на миграция на частицата в тръбата и траекторията, която описва тя. Според тези резултати неутрално суспендирана в течение на Поазьой капка ще мигрира радиално навън в посока към стената, докато експериментите на Голдсмит и Мейсън [21] показват, че тя се движи радиално навътре в посока към оста на тръбата. Това несъответствие на теоретичните и експерименталните резултати се дължи на допуснатата грешка при пресмятане на траекториите. Ако грешката се поправи, радиалната посока на движение на деформираната флуидна частица се променя, но големината на получената радиална скорост съществено се различава от получената експериментално.

По-добро съвпадение между теоретичните и експерименталните резултати получават Уол и Рабинов [43], които изследват по-обща задача, от която като частен случай се получава задачата на Хабер и Хетсрони [40].

Шафри и др. [44] изследват хидродинамичното взаимодействие между стена и близка до нея капка. Те разглеждат простия случай, когато флуидната частица е суспендирана близо до ограничаващата течението на Поазьой равнинна стена. Това течение се доближава до течението на Поазьой, в което радиусът на тръбата е голям и капката е близо до стената. Допуснатите грешки в [44] са коригирани от същите автори в [45]. За скоростта на миграцията на деформираната капка авторите на [44, 45] получават

$$(32) \quad U_m = Sa \left(\frac{\mu Sa}{\sigma} \right) \left(\frac{a}{h} \right)^2 f(k),$$

където

$$f(k) = \frac{(19k + 16)(9k^2 + 17k + 9)}{(k + 1)^3}.$$

Формулата (32) е получена при условие, че величините $\frac{a}{h}$ и $\frac{\mu Sa}{\sigma}$ са малки, а k е от порядъка на единица. Формулата за капка близо до равнинна стена, ограничаваща течението на Поазьой, експериментално е потвърдена от Карни и др. [14].

През 1967 г. Шафри и Бренер [46] разработват метод за изследване с точност до втори порядък на деформациите на капка, суспендирана в течение на Кует. Получен е интересен резултат — като се отчете второто приближение при изследване деформациите на капката, нейната форма вече не е елипсоидна.

С цел да обобщи резултатите и за две флуидни частици в градиентен поток Грийнщейн [47] разглежда задачата за бавно движение на две сферични капки, разположени симетрично относно оста на кръгова тръба. Посоката на движение на частиците е перпендикулярна на правата, минаваща през центровете им, което усложнява значително решението на задачата. Прилагайки метода на отражението, Хетсрони и Хабер [48] също изследват хидродинамичното взаимодействие между две сферични капки, потопени в неограничено градиентно течение с произволна скорост. Тъй като посоката на движение на двете капки е в направление, перпендикулярно на правата, минаваща през центровете им, задачата е пространствена и полученото решение има сложна структура.

Котансо и Тизон [49] изследват експериментално и теоретично изплуването на мехур в тръба. За малки стойности на числото на Рейнолдс и $\frac{a}{h} < 0,2$ (a е радиусът на мехура, а h — най-малкото разстояние от центъра на частицата до стената на тръбата) те установяват, че мехурът остава почти сферичен. При $\frac{a}{h} > 0,6$ флуидната частица има цилиндрична форма, завършваща в двата края с “чадъробразна” форма. При $0,2 < \frac{a}{h} < 0,6$ мехурът има елипсоидна форма.

Глюкман и др. [50] разработват аналитико-числен колокационен метод, при който граничните условия се удовлетворяват само в определен

неголям брой точки от повърхността на частицата, която се обтича. Използвайки този метод, Ганотос и др. [51] изследват движението на три твърди частици в неограничено пространствено течение. Главният проблем при прилагането на този метод е изборът на положението на колокационните точки. Ганотос и др. [52] прилагат този метод за изследване движението на твърда сфера в произволна посока между две успоредни равнини. Въз основа на същия метод Даган и др. [53] решават задачата за движение на твърда сферична частица близо до стена с крайна дължина.

През 1988 г. Шапира и Хабер [54] изследват бавно движение на деформируема капка, успоредно на две равнини. Тъй като върху флуидните частици точките на колокация не могат да се изберат предварително, когато те са деформируеми. Шапира и Хабер прилагат метода на отражението. Сходимостта на решението обаче не е добра, когато частицата е близо до една от равнините.

Много бавните вискозни течения между две успоредни вертикални равнини се описват от уравненията

$$(33) \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g,$$

където началото на координатната система е взето в средата между пластините, оста Oy е насочена вертикално, оста Ox — хоризонтално и лежи в средата между двете равнини, а оста Oz — перпендикулярно на последните. Когато тези равнини са много близо една до друга и в течението между тях се намира цилиндрично препятствие, чрез образуващите успоредни равнини те получават т. нар. клетка на Хел-Шоу. Флуидът в клетката се движи под действие на градиента на налягането, приложен в двата ѝ края. Несмутеното равнинно течение на Поазьой се записва във вида

$$(34) \quad (u, v) = \frac{6z}{b} \left(1 - \frac{z}{b}\right) (U, V),$$

където b е разстоянието между равнините. Ако се замести в (33), се получават уравненията

$$(35) \quad \frac{12\mu}{b^2} U = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{12\mu}{b^2} V = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g,$$

които са идентични по вид с уравненията, описващи движението в пореста среда, т. е. с уравненията на Дарси. Затова клетката на Хел-Шоу се разглежда като модел на пори с пропускливост $\frac{b^2}{12}$ и решенията на задачите за движение на вискозни флуиди са пряко свързани с двумерните филтрационни течения. През 1898 г. Хел-Шоу [55] установява, че при постоянни стойности на z в равнината (x, y) се получава двумерно скоростно поле, което е потенциално и върху твърдите стени удовлетворява

само условието за непротичане. Затова линиите на тока при стационарно обтичане на препятствия в клетката на Хел-Шоу са идентични по форма с тези в хипотетично двумерно течение на идеален флуид около препятствие от същия вид. Този резултат позволява да се използва клетката на Хел-Шоу за демонстрационни визуализации на линиите на тока на идеални потенциални течения около препятствия с различна форма, като се въвежда оцветяване в няколко точки на входа на съоръжението.

Точни решения на задачата за стационарно изплуване на мехури в клетка на Хел-Шоу, съдържаща вискозен флуид, намират Тейлор и Сафман [56]. Те доказват, че от тези решения устойчиво е онова, което се отнася за мехур, чиято ширина е два пъти по-малка от разстоянието между двете успоредни равнини. Интересни резултати за хидродинамични проблеми, свързани с клетката на Хел-Шоу, се съдържат в работите [57] – [63].

Пълен обзор на изследванията до 1972 г. на хидродинамичното взаимодействие между твърди или флуидни частици и кръгови тръби, съдържащи вискозен флуид, е даден от Бренер в [64, 65]. Усъвършенствуване на метода на Кокс [38] и подобрене на резултатите са извършени от Франкъл и Акривос [66] и Бардес-Бисел и Акривос [67]. Теоретичните резултати добре се съгласуват с експерименталните резултати на Торза, Кокс и Мейсън [68].

Ралисън [69] извършва критичен анализ на получените резултати от изследванията на движението на флуидни частици в градиентни течения. Използвайки подхода, разработен в теорията на тънкото крило, той разглежда големи деформации на флуидни частици в градиентен поток. Ралисън и Акривос [70] разработват числен метод, който дава възможност да се пресмята формата на капката (мехура) в случаите, в които асимптотичната теория е неприложима.

В обзора си от 1984 г. Ралисън [69] анализира различни видове градиентни течения, като изхожда от разделянето на несмутената скорост \vec{v} на потока на две компоненти: 1) свързана с тензора на деформацията e_{ij} ; 2) свързана с тензора на завихрянето ω_{ij} :

$$\vec{v} \sim Ca(e_{ij} + \omega_{ij})\vec{x},$$

където $Ca = \frac{U\mu}{\sigma}$ е капилярното число. В зависимост от вида на тензорите e_{ij} и ω_{ij} , записани в декартови координати, най-простите градиентни течения, изследвани досега, са:

1. Просто градиентно течение

$$\vec{v} = \vec{v}(Sy, 0, 0); \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2. Равнинно хиперболично течение

$$\vec{v} = \vec{v}(Sx, -Sy, 0); \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \omega_{ij} = 0,$$

при което няма завихреност на потока. Този вид градиентно течение се получава например при четирицилиндровия уред на Тейлор.

3. Ортогонално реометрично течение

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\kappa \\ -1 & 0 & 0 \\ 2\kappa & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Параметърът κ е свързан с промяната на относителната ориентация на вихъра спрямо главните оси на тензора на деформацията.

4. Чисто ососиметрично разтягане

$$\vec{v} = \vec{v}(Sx, -\frac{1}{2}Sy, -\frac{1}{2}Sz);$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \omega_{ij} = 0.$$

5. Равнинни градиентни течения

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \kappa) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(1 - \kappa) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тук $-1 \leq \kappa \leq 1$ е параметър, чиито стойности принадлежат на $[-1, 1]$. При $\kappa = 0$ се получава като частен случай простото градиентно течение, а при $\kappa = -1$ — равнинното хиперболично течение.

Изучаването на свойствата на кръвта при градиентното ѝ движение е в голяма степен свързано с изследване поведението на формените ѝ елементи — еритроцити, левкоцити и тромбоцити. Една от най-изследваните биомембранни структури, движещи се в градиентните течения, са еритроцитите. В хидромеханиката те се моделират като твърди частици, капки или микрокапсули. Като твърди частици еритроцитите са изследвани например в [71] – [76] и др. През 1969 г. Шмидт-Шонбейн и Уелс [77] предлагат движещите се в градиентен поток еритроцити да се моделират като капки. Този модел води началото си от изследванията на Голдсмит [78] на поведението на течни капки, намиращи се в движещ се в кръгова тръба вискозен флуид. През 1976 г. Голдсмит и Скейлак [79] наблюдават аксиална миграция на еритроцитите в кръгова тръба и деформирането им

в елипсоидна форма със слабо изразен “димпъл”. Моделирането на еритроцитите като флуидни частици е изследвано и от много други автори — [80] – [83] и др. През 1967 г. Роске [84] и Годард и Милер [85] изследват движението на хомогенни еластични сферични частици в градиентно течение.

По-реалистичен модел на еритроцитите се получава, като се вземат предвид техните еластични свойства. През 1968 г. Лайтхил [86] и през 1969 г. Фицджералд [87], прилагайки теорията на смазките, определят движението на еластични сфери в капилярни тръби.

През 1974 г. Ричардсън [88] разглежда елипсоидни микрокапсули, суспендирани в градиентно течение, като модел на еритроцитите в кръвта. Същия модел разглежда през 1980 г. Бадес-Бисел [89], като взема формата на микрокапсулата за сферична. Движенията на външния слой и на течността вътре в сферичната микрокапсула се описват с уравненията на Стокс. Материалът на мембраната е приет за несвиваем, еластичен и физически нелинеен от най-общ вид. Под действието на вискозните сили на течностите мембраната претърпява от двете страни крайни премествания и деформации. За решаване на така формулираната линейна задача е приложен методът на смущенията (пертурбациите) за малки отклонения от сферичната форма. Брун [90] разглежда също пертурбации на малки сферични микрокапсули във вискозно течение. Далеч от еритроцита течението се приема за хомогенно и зависещо от времето. Получени са в явен вид реологичните уравнения на разрежена суспензия в сферични частици в случаите, когато те са твърди, еластични или представляват микрокапсули, запълнени с вискозен нютонен флуид. През 1985 г. Бадес-Бисел и Сгайер [91] обобщават полученото в [89] решение, като разглеждат микрокапсули, чиято деформируема мембрана има вискозно-еластична реология, съответстваща на модела на Келвин—Фойхт. Те прилагат итерационна изчислителна процедура при малки отклонения на деформируемата мембрана от сферична форма. В [91] авторите разглеждат и частните случаи на чисто еластична и чисто вискозна мембрана. Изследван е и случаят, когато мембраната се моделира като безкрайно тънка черупка от тримерен еластичен материал при някои частни видове конститутивни уравнения.

Като допълнение на обзора на градиентни течения ще отбележим и изследването на картината на течението и силите на хидродинамичното взаимодействие при обтичане на две твърди сферични частици от ососиметричен вискозен поток с параболичен профил на скоростта, извършено от Калицова-Куртева и Запрянов [92].

Като използват резултатите от [28], Дарабанер и Мейсън [93] пресмятат траекториите на две частици при обтичането им от градиентен поток. Сравняването с експерименталните данни показва добро съвпадение. Тези резултати са използвани от други автори при определяне на ефективния вискозитет на суспензии от сферични частици с обемна концентрация от 1 до 2%. През 1977 г. Дейвис и О’Нил [94] решават

задачата за обтичане на кръгов цилиндър от градиентен вискозен поток, ограничен от равнина. Когато разстоянието между цилиндъра и равнината клони към нула, от двете стени започват алтернативно да се генерират вихри. Тази структура на течението преминава в безкрайна редица от вихри, когато цилиндърът има обща точка с равнината [95]. Обширен клас от градиентни течения разглеждат Горен и О'Нил [96]. По-специално те изследват обтичането на твърда сферична частица близо до равнината от градиентен поток. В [97] се разглежда вискозният поток, индуциран от движението на кръгова тръба, в която се намира твърда сфера. Хидродинамичните ефекти, дължащи се на влиянието на стената, се пренебрегват, тъй като се предполага, че радиусът на сферата е много по-малък от радиуса на тръбата. Това дава възможност на авторите да разглеждат обтичане на сферична частица от т. нар. "неограничено течение на Поазъой".

В един от първите модели на движението на еритроцитите в кръвната плазма в капилярните кръвоносни съдове еритроцитите се моделират като твърди частици, кръвната плазма — като вискозна течност и кръвоносните съдове — като кръгови цилиндрични тръби. Една част от изследванията в това направление се основават на общото решение, получено от Хаберман и Сайре [98]. В [99] — [100] са разгледани и други възможности за моделиране на еритроцитите в кръвта, като особено е подчертан моделът, при който еритроцитите се моделират като течни капки, покрити с еластична мембрана.

Да разгледаме ососиметричен градиентен поток със скорост

$$(36) \quad \vec{v}_\infty^* = A_0 \rho z \vec{i}_\rho - z^2 \vec{i}_z,$$

където \vec{i}_ρ и \vec{i}_z са единични вектори в цилиндрична координатна система (ρ, z, φ) и A е константа. Ако дефинираме функция на тока чрез равенствата

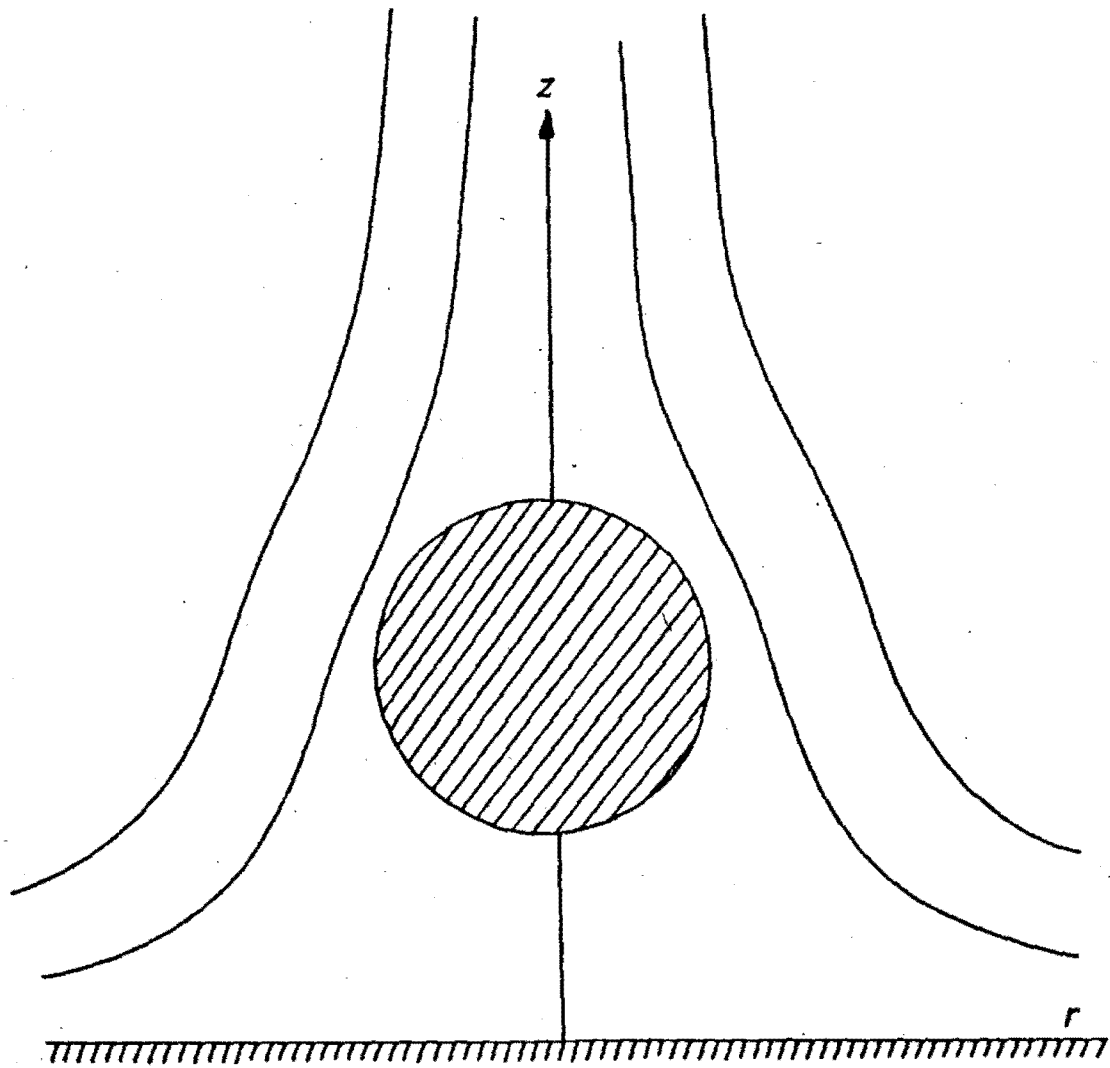
$$(37) \quad u^* = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^*}{\partial z}, \quad w^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho},$$

след интегриране получаваме

$$(38) \quad \Psi^* = \frac{1}{2} A_0 \rho^2 z^2.$$

Течението, определено от тази функция на тока, е ососиметрично течение около критична точка. Нека сферична капка с радиус a се намира в течението, така че центърът ѝ да лежи на оста $\rho = 0$, и на разстояние $h > a$ от равнината $z = 0$ (фиг. 1) формата ѝ ще се запазва.

Да представим функцията на тока Ψ на смутеното течение във вида $\Psi = \Psi^* + \Psi_1$, където Ψ^* е несмутеното течение далеч от капката. Тогава Ψ_1 ще удовлетворява уравнението на Стокс за бавно движение на



Фиг. 1

вискозен флуид:

$$(39) \quad E^4 \Psi_1 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_1 = 0,$$

тъй като функцията (38) удовлетворява това уравнение.

Да въведем бисферична координатна система, в която $\xi = 0$ да бъде уравнението на равнината, а $\xi = \alpha$ — уравнението на повърхността на капката. Тогава безразмерното разстояние $h = \text{sh} \alpha$ от капката до равнината определя еднозначно α и фокалното безразмерно разстояние $c = \text{sh} \alpha$. Ако означим с $\hat{\Psi}_1$ функцията на тока вътре в капката, уравнението (39) ще решаваме при следните гранични условия:

1) Върху твърдата равнина $\xi = 0$:

$$(40) \quad \Psi = 0, \quad \Psi_1 = -\Psi^*;$$

$$(41) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi};$$

2) Върху повърхността на междуфазовата граница $\xi = \alpha$:

$$(42) \quad \Psi_1 = \hat{\Psi}_1 = 0;$$

$$(43) \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} = \lambda \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_1}{\partial \xi^2};$$

3) В безкрайност, т.е. при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow 0$:

$$(44) \quad \Psi_1 \rightarrow 0.$$

Тук $\lambda = \frac{\hat{\mu}}{\mu}$, където $\hat{\mu}$ и μ са динамичните вискозитети на флуидите вътре и вън от капката.

За ососиметрично течение в бисферична координатна система операторът E^2 има вида

$$E^2 \equiv \frac{\text{ch}\xi - \beta}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\text{ch}\xi - \beta) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + (1 - \beta^2) \frac{\partial}{\partial \beta} \left[(\text{ch}\xi - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \right\},$$

където $\beta = \cos \eta$.

Решението на уравнението (39) в бисферични координати вън и вътре в капката се записва така:

$$(45) \quad \Psi_1 = B(\text{ch}\xi - \beta)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\xi) V_n(\beta),$$

$$(46) \quad \hat{\Psi}_1 = B(\text{ch}\xi - \beta)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n(\xi) V_n(\beta),$$

където

$$V_n(\beta) \equiv P_{n-1}(\beta) - P_{n+1}(\beta)$$

($P_n(\beta)$ са полиномите на Лъожандър),

$$U_n(\xi) = A_n \text{ch} j_n \xi + B_n \text{sh} j_n \xi + C_n \text{ch} k_n \xi + D_n \text{sh} k_n \xi,$$

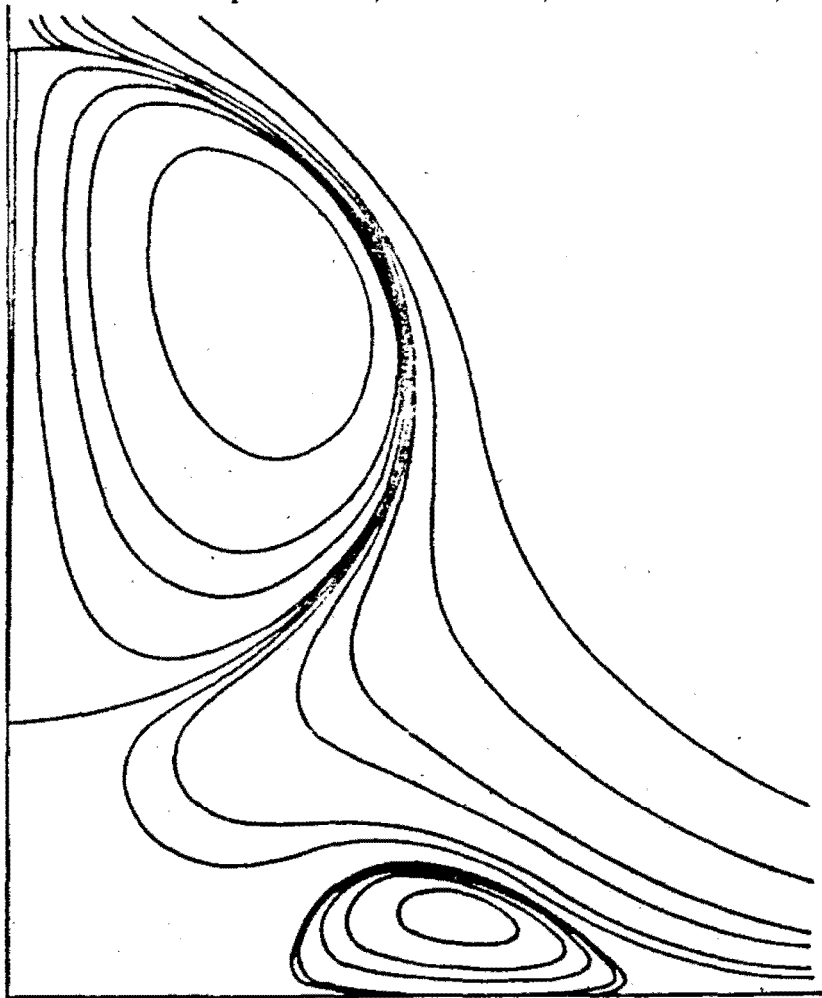
$$\hat{U}_n(\xi) = a_n e^{-j_n \xi} + b_n e^{-k_n \xi},$$

$$j_n = n - \frac{1}{2}, \quad k_n = n + \frac{3}{2}, \quad B = \frac{1}{2} A_0 c^4.$$

Коефициентите A_n , B_n , C_n , D_n , a_n и b_n се определят числено от граничните условия (40) - (44), като се вземе предвид, че

$$\begin{aligned} \Psi^* &= \frac{1}{2} A_0 c^4 \frac{\sin^2 \eta \psi \text{sh}^2 \xi}{(\text{ch}\xi - \beta)^4} \\ &= \frac{1}{2} A_0 c^4 (\text{ch}\xi - \beta)^{-3/2} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} [j_n e^{-j_n \xi} - k_n e^{-k_n \xi}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{sh}\xi}{\text{ch}\xi} [e^{-j_n \xi} - e^{-k_n \xi}] \right\} V_n(\beta). \end{aligned}$$

Тъй като коефициентите A_n , B_n , C_n , D_n намаляват бързо с увеличаването на n , за пресмятането на функциите на тока на течението вън и вътре в капката е достатъчно във формулите (45), (46) да се вземат 15-16 члена. Линиите на тока зависят от два параметъра λ и h . На фиг. 2 те са показани при $\lambda = 0,5$ и $h = 1,8$. Вижда се, че зад капката близо до



Фиг. 2

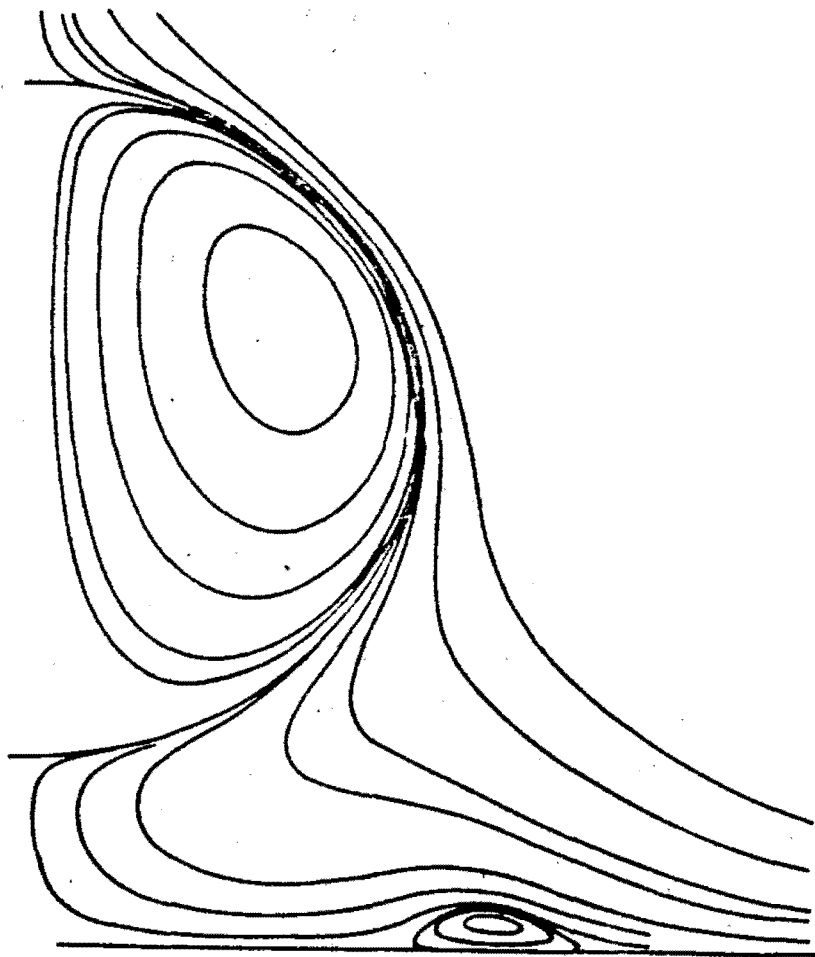
стената се появява вихър. При големи разстояния на флуидната частица от равнината този вихър изчезва. При $\lambda = 0,5$ за $h_{кр}$ се получава $h_{кр}^2 \sim 7$ (по-точно $6,769 < h_{кр}^2 < 7,470$). При $\lambda = 1,5$ и $h = 1,6$ също има два вихъра зад капката близо до стената (фиг. 3), които са симетрично разположени относно оста Oz . При $\lambda = 1,5$ за критичното разстояние получаваме $h_{кр}^2 \sim 8$ (по-точно $7,473 < h_{кр}^2 < 8,25$). Хидродинамичното силово взаимодействие между флуидната частица и твърдата стена се характеризира със силата, с която флуидът действа върху капката при наличие на стената. Поради ососиметричността на задачата

$$F_x = F_y = 0 \quad \text{и} \quad F_z = 6\pi\mu A_0 a^3 f_0,$$

където

$$f_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{sh}^3 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+3} B_n.$$

Зависимостта на f_0 от разстоянието h за различни стойности на λ е дадена на фиг. 4. При големи стойности на λ ($\lambda \rightarrow \infty$) флуидната частица

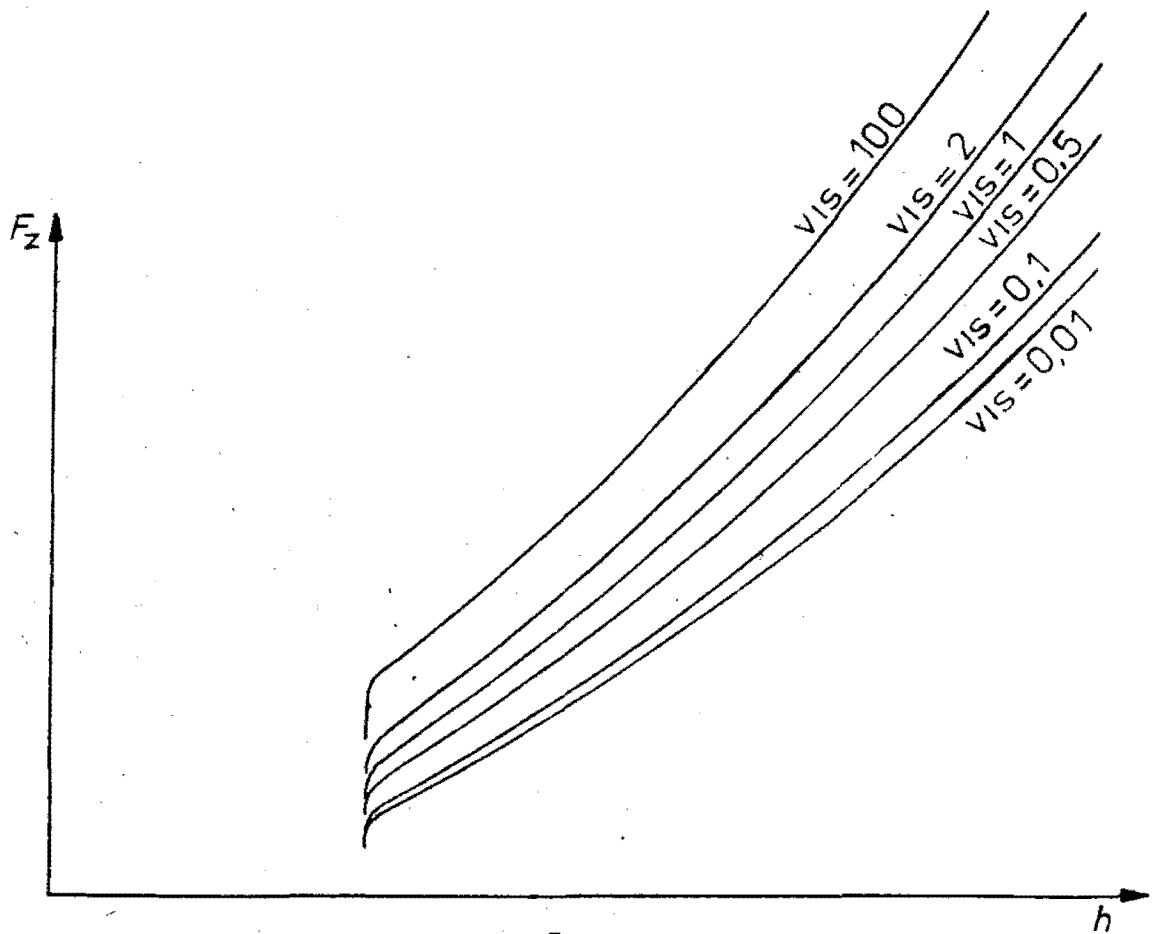


Фиг. 3

се “втвърдява” и зависимостта между f_0 и h за капка преминава в дадената от Горен и О’Нил [96] зависимост между f_0 и h за твърда сфера. Сравнението е дадено на табл. 1.

Изследването на обтичането на твърди или флуидни частици от градиентни вискозни течения е сравнително по-трудно от изследването на същите хидродинамични задачи при обтичане с равномерен поток. Когато частиците са свободно суспендирани в градиентни вискозни течения, те могат да описват много сложни траектории. Например в просто градиентно течение две сферични частици могат да се въртят безкрайно (неограничено) в затворени траектории (орбити), докато при удължаващите (разтягащите) течения техните траектории са отворени с изключение на случая, когато двете частици се допират.

Простото несмутено градиентно течение е вихрово, а несмутените ососиметрични равнинни удължаващи течения са безвихрови. Поради съществуващия градиент на скоростта при градиентните течения свободно суспендираните в тях частици се движат с различни транслационни и ротационни скорости, което е причина за тяхното доближаване и дори сблъскване. Възникват въпроси като: 1) Може ли да се получи равновесен физичен контакт между две сблъскали се частици? 2) Как действуват



Фиг. 4

различните видове градиентни течения върху различните видове форми-
 рали се образувания (агрегати) от частици? 3) Поведението на агрега-
 тите зависи ли от това, дали несмутеното градиентно течение е вихрово
 или не?

Т а б л и ц а 1

h/a	$f_0[96]$	f_0
51,0	2660,0	2659,87
10,0	112,80	112,78
5,0	32,090	32,0912
2,0	7,533	7,532
1,5	5,146	5,1452
1,1	3,575	3,5748
1,05	3,400	3,3949
1,01	3,263	3,2606
♦ 1,005	3,246	3,21

В [93] е показано експериментално, че в суспензиите от сферични частици в просто градиентно течение едновременно сблъскване на n частици ($n \geq 3$) може да доведе както до образуване, така и до разрушаване на двойки от частици, които имат затворени траектории.

При простото градиентно течение раздалечаването на частиците или образуването на дублети зависи от техните траектории. Отворените траектории водят до разпръскване (диспергиране) на частиците, докато затворените траектории не притежават това свойство.

Тъй като теоретично сферите не могат да установят физичен контакт [102], заключаваме, че в градиентните течения е невъзможно агрегиране на частици без действието на привличащи сили между тях. В зависимост от вида на градиентното течение то може да има или няма диспергиращи (разпръскващи) ефекти върху съществуващи агрегати. Ососиметричните и равнинните удължаващи течения лесно диспергират агрегати от почти допиращи се сферични частици.

Интересно свойство притежават суспензиите, чиито частици имат несферична форма — вместо да се ориентират в едно направление, частиците се въртят неравномерно по периодично затворени орбити. Такъв вид траектории са били получени най-напред от Джефри [2] при изследване на суспензии с частици, имащи формата на ротационни елипсоиди. Обобщени резултати от извършените експериментални изследвания на обтичането на твърди и флуидни частици са дадени в монографията на Клифт, Грейс и Вебер [103] през 1978 г.

Наред с решените съществуват и много нерешени проблеми от хидродинамичното взаимодействие при градиентни течения в стоксово приближение между деформируеми флуидни частици, между капки (мехури) и твърди или междуфазови граници и др. Най-неразработени са досега проблемите за определяне на хидродинамичното взаимодействие при градиентни течения между две и повече твърди или флуидни частици, когато се използват пълните уравнения на Навие — Стокс.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein. — Ann. Physik, 19, 1906, p. 289; Ann. Physik, 34, 1911, 591.
2. G. B. Jeffery. — Proc. Roy. Soc. (London), A 102, 1922, 161.
3. H. Faxen. — Arkiv Mat. Astron. Fys., 17, N 27, 1923.
4. H. Faxen. — Arkiv Mat. Astron. Fys., 19, N 22, 1925.
5. S. Wakiya. — J. Phys. Soc., 12, 1957, 1130.
6. S. Wakiya. — Res. Rep. Fac. Eng. Niigata Univ. Japan, 7, 1958, 1.
7. F. P. Bretherton. — J. Fluid Mech., 12, 1962, 591.
8. F. P. Bretherton. — J. Fluid Mech., 14, 1962, 284.
9. R. Ladenburg. — Ann. Physik, 23, 1907, 447.
10. S. Wakiya. — Res. Rep. Fac. Eng. Niigata Univer., Japan, 5, 1956, 1.
11. S. Wakiya. — J. Phys. Soc. Japan, 8, 1953, 254.
12. G. Segre, A. Silberberg. — Nature, 189, 1961, 209.

13. G. Segre, A. Silberberg. — *J. Fluid Mech.*, **14**, 1962, 115, 136.
14. A. Karnis, H. Goldsmith, S. G. Mason. — *Nature*, **200**, 1963, 159.
15. H. L. Goldsmith, S. G. Mason. — *Bibliotheca Anat.*, **4**, 1964, 462.
16. R. C. Jeffery. — *J. Fluid Mech.*, **22**, 1965, 721.
17. R. Eichhorn, S. Small. — *J. Fluid Mech.*, **20**, 1964, 513.
18. J. T. Day, W. E. Genetti. — B. S. thesis, Univ. Utah. Salt. Lake City, Utah., 1964.
19. C. D. Denson, E. B. Christiansen, D. L. Salt. — *A. I. Ch. E. J.*, **12**, 1966, 589.
20. S. I. Rubinow, J. B. Keller. — *J. Fluid Mech.*, **11**, 1961, 447.
21. H. L. Goldsmith, S. G. Mason. — *J. Colloid Sci.*, **17**, 1962, 448.
22. P. G. Saffman. — *J. Fluid Mech.*, **22**, 1965, 385.
23. A. J. Goldman, H. Brenner. — *Chem. Engng. Sci.*, **21**, 1966, 1151.
24. M. E. O'Neill. — *Chem. Engn. Sci.*, **23**, 1963, 1293.
25. W. R. Dean, M. E. O'Neill. — *Mathematika*, **10**, 1963, 13.
26. S. Wakiya. — *J. Phys. Soc. Japan*, **22**, 1967, 1101.
27. M. H. Davis. Rept. N NCAR-TN/STR-64, National Center for Atmospheric Research Boulder, Colorado, 1971.
28. C. J. Lin, K. J. Lee, N. F. Sather. — *J. Fluid Mech.*, **43**, 1970, 35.
29. S. G. Curtis, L. M. Hocking. — *Trans. Faraday Soc.*, **66**, 1970, 1381.
30. G. K. Batchelor, J. T. Green. — *J. Fluid Mech.*, **56**, 1972, 375.
31. S. Wakiya. — *J. Phys. Soc. Japan*, **31**, 1971, 1581.
32. A. Nir, A. Acrivos. — *J. Fluid Mech.*, **59**, 1973, 209.
33. H. Lamb. *Hydrodynamics*, Dover, 1945.
34. H. Faxen. — *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, **18**, N 29, 1924.
35. G. I. Taylor. — *Proc. Roy. Soc. (London)*, A **138**, 1932, 41.
36. G. I. Taylor. — *Proc. Roy. Soc. (London)*, A **146**, 1934, 501.
37. F. D. Rumscheidt, S. G. Mason. — *J. Colloid Sci.*, **16**, 1961, 238.
38. R. G. Cox. — *J. Fluid Mech.*, **37**, 1969, 601.
39. G. Hetsroni, S. Haber. — *Rheol. Acta*, **9**, 1970, 488.
40. S. Haber, G. Hetsroni. — *J. Fluid Mech.*, **49**, 1971, 257.
41. G. Hetsroni, S. Haber, E. Wacholder. — *J. Fluid Mech.*, **41**, 1970, 689.
42. J. Happel, H. Brenner. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, N. Y., Prentice-Hall, 1965.
43. P. R. Wohl, S. I. Rubinov. — *J. Fluid Mech.*, **62**, 1974, 185.
44. C. E. Chaffey, H. Brenner, S. G. Mason. — *Reologica Acta*, **4**, 1965, 64.
45. C. E. Chaffey, H. Brenner, S. G. Mason. — *Reologica Acta*, **6**, 1967, 100.
46. C. H. Chaffey, H. Brenner. — *J. Colloid and Interface Sci.*, **24**, 1967, 258.
47. T. Greenstein. — *J. Phys. Soc. Japan*, **32**, 1972, 1398.
48. G. Hetsroni, S. Haber. — *Int. J. Multiphase Flow*, **4**, 1978, 1.
49. M. Coutanceau, P. Thizon. — *J. Fluid Mech.*, **107**, 1981, 339.
50. P. Gluckman, R. Pfeffer, S. Weinbaum. — *J. Fluid Mech.*, **50**, 1971, 705.
51. P. Ganotos, R. Pfeffer, S. Weinbaum. — *J. Fluid Mech.*, **84**, 1978, 79.

52. P. Ganotos, R. Pfeffer, S. Weinbaum. — *J. Fluid Mech.*, **99**, 1980, 755.
53. Z. Dagan, R. Pfeffer, S. Weinbaum. — *J. Fluid Mech.*, **122**, 1982, 273.
54. M. Shapira, S. Haber. — *Int. J. Multiphase Flow*, **14**, 1988, 483.
55. H. J. Hele Shaw. — *Nature*, **58**, 1988, 34.
56. J. W. McLean, P. G. Saffman. — *J. Fluid Mech.*, **102**, 1981, 455.
57. F. P. Bretterton. — *J. Fluid Mech.*, **10**, 1961, 166.
58. G. Tryggvason, H. Afer. — *J. Fluid Mech.*, **136**, 1983, 1.
59. C. W. Park, G. M. Homsey. — *J. Fluid Mech.*, **139**, 1985, 1583.
60. P. Tabeling, A. Libchaber. — *Phys. Rev.*, A **33**, 1986, 794.
61. T. Maxworthy. — *J. Fluid Mech.*, **173**, 1986, 95.
62. L. W. Schwartz, H. M. Princen, A. D. Kiss. — *J. Fluid Mech.*, **172**, 1986, 259.
63. D. A. Reinelt. — *J. Fluid Mech.*, **175**, 1987, 557.
64. H. Brenner. In *Advances in chemical Engineering*, Academic Press, 1966, 287.
65. H. Brenner. — *Progress in Heat and Mass Transfer*, **6**, 1971, 487.
66. N. A. Frankel, A. Acrivos. — *J. Fluid Mech.*, **44**, 1970, 65.
67. D. Barthes-Biesel, A. Acrivos. — *J. Fluid Mech.*, **61**, 1973, 1.
68. S. Torza, R. G. Cox, S. G. Mason. — *J. Colloid Interface Sci.*, **38**, 1972.
69. J. M. Rallison. — *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16**, 1984, 45.
70. J. M. Rallison, A. Acrivos. — *J. Fluid Mech.*, **89**, 1978.
71. H. Goldsmith, G. Mason. *The microrheology of dispersions in Rheology* (Edited by Eirich F. R. v.4), Academic Press, N. Y., 1967.
72. H. Wang, R. Skalak. — *J. Fluid Mech.*, **38**, 1969, 75.
73. T. Chen, R. Skalak. — *Appl. Sci. Res.*, **22**, 1970, 403.
74. H. Brenner, P. Bungay. — *Fedn. Proc.*, **30**, 1971, 1565.
75. P. Bungay, H. Brenner. — *Int. J. Multiphase Flow*, **1**, 1973, 25.
76. B. Skalak, P. Chen, S. Chien. — *Biorheology*, **9**, 1972, 67.
77. H. Schmid-Schonbein, R. Well. — *Science*, **165**, 1969, 288.
78. H. Goldsmith. — *J. Gen. Physiol.*, **52**, 1968, 55.
79. H. Goldsmith, R. Skalak. — *Hemodynamics, Ann. Rev. Fluid Mech.*, **7**, 1975, 213.
80. H. Gauthier, H. Goldsmith, S. G. Mason. — *Biorheology*, **9**, 1972, 205.
81. K. Kline. — *Biorheology*, **9**, 1972, 287.
82. W. Hуman, R. Skalak. — *A. I. Ch. E. J.*, **18**, 1972, 287.
83. Отчет на договорна разработка 514/16623Г. Хидродинамично моделиране на емулсии и мембрани. Ръководител на договора З. Запryanов.
84. R. Roscoe. — *J. Fluid Mech.*, **28**, 1967, 273.
85. J. Goddard, Ch. Miller. — *J. Fluid Mech.*, **28**, 1967, 657.
86. M. Lighthil. — *J. Fluid Mech.*, **34**, 1968, 113.
87. J. Fitz-Gerald. — *Proc. Roy. Soc.*, B **174**, 1969, 193.
88. E. Richardson. — *Proc. Roy. Soc.*, A **338**, 1974, 129.
89. D. Barthes-Biesel. — *J. Fluid Mech.*, **100**, 1980, 831.
90. P. Brun. — *Biorheology*, **17**, 1980, 419.
91. D. Barthes-Biesel, H. Sgaier. — *J. Fluid Mech.*, **160**, 1985, 119.
92. P. Kalitzova-Kurteva, Z. Zapryanov. *Sixth congress of theoretical and applied Mechanics*, Varna, 1989.
93. C. Darabaner, S. Mason. — *Reol. Acta*, **6**, 1967, 273.

94. A. Davis, M. O'Neill. — *J. Fluid Mech.*, **81**, 1977, 551.
95. Schubert. — *J. Fluid Mech.*, **27**, 1967, 647.
96. S. Goren, M. O'Neill. — *Chem. Engn. Sci.*, **26**, 1971, 325.
97. A. Chwang, T. Yao-Tsu Wu. — *J. Fluid Mech.*, **67**, 1975, 787.
98. W. Haberman, R. Sayre. — 1958, Davis Taylor Model Basin Report 1143, Washington, D.C.
99. P. Brunn. — *J. Fluid Mech.*, **126**, 1983.
100. D. Bathes-Biesel, H. Soaier. — *J. Fluid Mech.*, **160**, 1985, 119.
101. F. Gross, A. Popel. *Mathematics of Microcirculation Phenomena*, 1980, 17.
102. A. Arp, G. Mason. — *J. Colloid and Interface Science*, **61**, 1977, 21.
103. R. Clift, J. Grace, M. Weber. *Bubbles, Drops and Particles* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.

Received 2. VII. 1990

FLUID MECHANICS OF RIGID OR FLUID PARTICLES IN SHEAR FLOWS

Z. Zapryanov

S u m m a r y

Beginning with the celebrated paper of Stokes* the theory of particle (rigid or fluid) motions in quiescent fluids has a long and auspicious history. This initial work has been extended in two main branches: uniform streaming flows and nonuniform (shear) flows.

In general, uniform flows are achieved by the action of an external force on the particles or of some tethering force when the fluid stream past stationary particles. Shear flows may arise because of the movement of apparatus boundaries as in the case of Coette flow or the action of an external pressure gradient as in Poiseuille flow through a circular tube.

Shearing flows may be generated as well by the extension of a thread of viscous fluid as in the polymer drawing processes or by the impaction of particles on collectors where one obtains a stagnation flow.

During the past two-three decades considerable progress has been made in the development of continuum theories of suspensions in which the suspended matter may consist of rigid or fluid particles. The understanding of the flow behaviour of particulate suspensions is important in many chemical technologies, sedimentation, engineering problems concerning with nuclear reactor cooling, performance of rigid-fuel rocket nozzles, aerosol spraying and others. Sedimentation, wherein particles fall under the action of gravity through a fluid, is commonly used in the petroleum industries as a way of separating particles from the fluid.

The hydrodynamic models of shear flows may be globally characterized by a shear rate S in units of reciprocal time and Reynolds number

$$Re = \frac{a^2 S}{\nu},$$

*G. G. Stokes. — *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, **9**, 1951, 8.

where a is the radius of the particle and ν is the kinematic viscosity of the fluid. For small Reynolds numbers the velocity \bar{v} and the pressure p must satisfy the Stokes and continuity equations

$$(1) \quad \nu \nabla^2 \bar{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \bar{v} = 0,$$

where ρ is the density of the fluid.

The mathematical modelling of heterogeneous systems (suspensions, emulsions, slurries etc.), as if it were homogeneous, has for many years been a challenge to both experimentalist and theoretician. As a result numerous models have been developed to show the link between the macroscopic behaviour of the system as a whole and the microscopic interactions between heterogeneities. Einstein [1] was the first who calculated the viscosity of a dilute suspension of rigid spheres in an incompressible Newtonian fluid. He considered creeping shear flow past a single sphere and multiplied the result obtained by the number of the spheres to give a total correction to undisturbed flow for a dilute suspension of noninteracting spheres. In this way he obtained his classical formula

$$(2) \quad \frac{\mu_{ef}}{\mu} = 1 + \frac{5}{2} \varphi + O(\varphi^2),$$

where μ_{ef} is the effective viscosity of suspension, μ is the viscosity of Newtonian fluid, comprising the continuous phase, and φ is the volume fraction of spheres in suspension. It is worth to note that a modern derivation of Einstein's suspension viscosity has been presented by Landau and Lifshitz*.

In an oft-quoted paper Jeffery [2] studied the behaviour of an ellipsoidal particle in a shearing field on the basis of Stokes equation of motion. This work has since provided the starting point for a multitude of theoretical investigations related to anisotropism in laminar shear flows. He considered a suspension of neutrally buoyant ellipsoids of revolution, dispersed in a Couette flow. The orientational distribution function is a periodic function of time, the period being

$$T = \frac{2\pi}{S} \left(k + \frac{1}{k} \right),$$

in which $k = \frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}}$ and a_{\parallel} , a_{\perp} are the lengths of the semiaxes of the symmetry and transverse axes respectively.

The axis of the ellipsoid of revolution moves in one of a family of closed periodic orbits, the center of the particle moving with the velocity of the undisturbed fluid at that point. Jeffery [2] found the time-average viscosity of the suspension by utilizing additional dissipation arguments and integrating this instantaneous, orientation-dependent quantity over one period. Accordingly, the energy dissipation depends upon the initial particle orientation and cannot be regarded as an intrinsic property of the fluid-particle suspension. Since the concept of an infinitely dilute suspension is an idealized one, Mason et al.** have performed a sequence of experiments and established that after a sufficient number of individual particle rotations the distribution of orbital parameters approaches a unique, steady-state distribution, which is apparently independent of the initial orientational distribution. In this connection we shall note that two spheres approaching one

*L. D. Landau, E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics, Addison-Wesley, 1959.

**S. G. Mason, R. J. Manley. — Proc. Roy. Soc. (London), A 238, 1956, 117.

another along two neighbouring streamlines, moving at different velocities, may either "collide" to form an effectively permanent collision doublet or else they may merely approach to within some minimal separation distance before their receding. The existence of closed streamlines furnishes a rational hydrodynamic explanation of the existence of permanent, two-sphere doublets.

Bretherton [7] considered the steady, two-dimensional motion at low Reynolds number of an incompressible viscous fluid past a circular cylinder, the velocity at large distance being described by a uniform simple shear. In 1962 Bretherton [8] extended Jeffery's analysis to bodies of more general shape and showed the existence of modes of motion, incapable of being displayed by ellipsoidal particles. He showed that for some rigid particles of revolution there exists a definite "preferred" orientation and the rigid bodies do not undergo a periodic rotation of the Couette flow. He found that the "preferred" orientation of the particles is such that their symmetry axis is directed along the streamlines. If

$$\epsilon = \frac{a-b}{a},$$

then

$$(3) \quad \frac{\mu_{ef}}{\mu} = 1 + m\varphi,$$

where $m = m(\epsilon)$ is a known function.

When one liquid is at rest in another liquid of the same density, it assumes the form of a spherical drop. The physical and chemical conditions of emulsions of two fluids, which do not mix, have been the subject of many studies, but very little seems to be known about the mechanics of the stirring processes. In contrast to the rigid particles, the principle physical characteristic of a fluid particle (a drop or a bubble) is its ability to deform under the influence of shear. But if the drops (bubbles) are very small or the surface tension is large then the shape of the fluid particles will tend to keep spherical. However, in general, the fluid particle adopts a nonspherical shape and its precise shape, when suspended in a fluid undergoing simple shear, is governed by the ratio of the viscous shearing forces, μS , to the interfacial tension forces, $\frac{\sigma}{a}$, where σ is the surface tension and a — the radius of the underformed drop (bubble). The fluid particle shape is determined in part by the dimension parameter

$$k = \frac{\sigma}{\mu a S}$$

and in part by the viscosity ratio

$$\alpha = \frac{\text{continuous phase viscosity}}{\text{fluid particle viscosity}} = \frac{\mu}{\hat{\mu}}$$

It is important to note also that the droplet contour adopts a definite orientation, relative to the principle axes of shear, though there exists an internal circulation within it.

In his two extraordinary papers G. I. Taylor [35, 36] found that the emulsion behaves like a Newtonian fluid with a viscosity

$$(4) \quad \mu_{ef} = \mu \left[1 + \frac{5}{2} \frac{1 + \frac{2}{5}\alpha}{1 + \alpha} \varphi \right]$$

For rigid particles $\alpha \rightarrow 0$ and one obtains Einstein's formula (2) but for gas bubble $\alpha \rightarrow \infty$ and

$$(5) \quad \mu_{ef} = \mu(1 + \varphi).$$

Not surprisingly, this viscosity is considerably less than that for rigid sphere suspension.

If the viscosity of moderately concentrated suspensions is presented by the power series expansion

$$(6) \quad \mu_{ef} = \mu \left(1 + \frac{5}{2}\varphi + k\varphi^2 + \dots \right),$$

then the second-order coefficient is governed by "two-body" interactions. That is why the investigation of the interaction of just two particles alone in a large expanse of fluid is of special significance.

Problems, in which a viscous fluid interacts with a deformable fluid particle and a rigid wall, are of considerable interest in the study of liquids, such as blood, polymer solutions, and suspensions of liquid droplets. The understanding of the mechanics of the interactions between the deformable fluid particle and the rigid wall is important both for investigating phenomena of interest at the level of a single particle and for the bulk rheology of the suspension. One problem of this type for example, is the response of a red blood cell to a viscous shear field.

In the theory of particle capture by filtration or scrubbing processes one must know the hydrodynamic forces, exerted on particles suspended in the flow, and particularly the extent of the influence of walls on these forces when the particles are moving to the walls. The normal force, exerted by axisymmetric stagnation flow on small rigid sphere touching a rigid plane was calculated by Goren*. A method for estimating the hydrodynamic force, acting on a small particle of a dilute suspension in a slow streaming motion past a large spherical obstacle, was presented by Goren and O'Neill [96].

The steady flow in and around a deformable drop, moving in an unbounded viscous parabolic flow and subjected to an external body force, was calculated for creeping-flow regime. It was found, in addition to the drag force that, the drop experiences a force orthogonal to the undisturbed flow direction. Whol and Rubinov [43] also calculated the trajectories for a drop in Poiseuille flow on the basis of their derived force. They predicted that a neutrally buoyant drop would move radially inwards to the cylinder axis, in agreement with the observations of Goldsmith and Mason [21].

The radial migration of a single spherical particle across the streamlines of a Poiseuille flow in a tube cannot be explained on the basis of Stokes' equations, even in the presence of the bounding walls, i.e. a sphere experiences no transverse force at creeping flow regime. A transverse force does exist if inertial forces are taken into account (Rubinov and Keller [20]). In fact, the radial force producing axial migration of the deforming drops (and flexible solid particles) arises from the interaction between the drop deformation and the flow field around the drop, rather than from an inertial effect. In this way the transverse force on a particle should be computable solely on the basis of the Stokes' equations if the particle is flexible.

Let us consider an axisymmetric shear flow that at infinity has the form

$$(7) \quad \vec{v}^* = A_0(\rho z \vec{i}_\rho - z^2 \vec{i}_z),$$

*S. L. G o r e n. — Fluid Mech., 41, 1970, 619.

where \vec{i}_ρ, \vec{i}_z are unit vectors in cylindrical coordinates (ρ, z) , A_0 is a constant and \vec{v}^* is the velocity at infinity. If a stream function Ψ^* is defined in the usual manner

$$(8) \quad u^* = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^*}{\partial z}, \quad w^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho},$$

then one has

$$(9) \quad \Psi^* = \frac{1}{2} A_0 \rho^2 z^2.$$

This undisturbed flow represents an axisymmetrical stagnation flow. Let us introduce a spherical drop of radius a into this flow, so that its centre lies on the axis $\rho = 0$ and at a distance from the plane $z = 0$. In this way the flow will be still symmetrical about the axis $\rho = 0$ and the stream function may be written as

$$\Psi = \Psi^* + \Psi_1,$$

where Ψ^* is the flow at infinity and Ψ_1 must satisfy the Stokes' creeping flow equation

$$(10) \quad E^4 \Psi \equiv \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^2 \Psi = 0,$$

since Ψ^* satisfies this equation.

In order to determine the solution of equation (10) we introduce bispherical coordinates (ξ, η) related to the cylindrical coordinates (ρ, z) by the relations

$$\rho = \frac{c \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

where $-\infty < \xi < \infty$ and $0 \leq \eta \leq \pi$ and c is a positive constant. The coordinate surface $\xi = \alpha$ describes the drop surface and $\xi = 0$ represents the rigid plane.

The boundary conditions are:

(i) on the rigid plane $\xi = 0$

$$(11) \quad \Psi = 0, \quad \Psi_1 = -\Psi^*;$$

$$(12) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi};$$

(ii) on the drop interface $\xi = \alpha$

$$(13) \quad \Psi_1 = \hat{\Psi}_1 = 0,$$

$$(14) \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial \xi},$$

$$(15) \quad \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} = \lambda \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_1}{\partial \xi^2};$$

(iii) at infinity $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow 0$,

$$(16) \quad \Psi_1 \rightarrow 0,$$

where $\lambda = \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}}$, $\mu^{(i)}$, $\mu^{(e)}$ are the dynamic viscosities inside and outside of the drop, respectively, and $\hat{\Psi}_1$ and Ψ_1 are the corresponding stream functions.

We have solved the problem of a stagnation (shear) flow past a spherical drop in proximity of a rigid wall at small Reynolds numbers (i.e. the problem (7) – (16)) and have found the structure of the flow and the force, exerted by creeping flow on the drop. Toshev and Zapryanov* have investigated numerically the problem of a stagnation flow past a rigid sphere in proximity of a rigid wall at moderate Reynolds numbers. The above two problems are connected with the investigation of the interaction between the blood erythrocytes and the walls of artificial organs. In the same connection Kalitzova-Kurteva and Zapryanov [92] have studied steady axisymmetric motion at low Reynolds numbers of an incompressible viscous fluid past two spherical particles, the velocity at large distance being described by an unbounded Poiseuille flow. If the radii of the particles are not smaller than that of the containing circular tube, one has to consider hydrodynamic effects due to the wall of the tube. They have obtained an exact solution for the flow fields of the above mentioned problem by an extension of the well known procedure, developed by Stimpson and Jeffery**.

Finally we will mention briefly some problems in the field of shear flows which are still not solved:

- i) The problem of shear creeping flow past two deformable drops or bubbles.
- ii) The problem of shear creeping flow past "two capsules" (two fluid drops, which are enclosed by an elastic membrane).
- iii) The problem of shear flows past two particles (rigid or fluid), where inertia terms are included.

*E. Toshev, Z. Zapryanov. In preparation for publication.

**M. Stimpson, G. B. Jeffery. — Proc. Roy. Soc., London, 11, 1926, 110.