ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 83, 1989

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 83, 1989

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ВОЗМУЩЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА И РАВНОСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Георги Е. Караджов

Георги Е. Караджов. РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ВОЗМУЩЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА И РАВНОСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Получена равномерная асимптотика спектральной функции $e(\lambda,x,y)$ при $\lambda \to +\infty$, $x,y \in \mathbb{R}$, для одного класса глобально эллиптических существенно самосопряженных псевдодифференциальных операторов с главным символом ξ^2+x^2. На этой основе доказана теорема о равносходимости рядов Фурье по собственным функциям, обобщающая известную теорему Сеге [1] о равносходимости рядов Эрмита.

Georgi E. Karadzhov. UNIFORM ASYMPTOTICS OF THE SPECTRAL FUNCTION FOR PERTURBED HARMONIC OSCILLATOR AND EQUICONVERGENCE OF SERIES WITH RESPECT TO THE EIGENFUNCTIONS

One obtains an uniform asymptotics of the spectral function $e(\lambda,x,y)$ as $\lambda \to +\infty$, $x,y \in \mathbb{R}$ for a class of globally elliptic essentially self-adjoint pseudodifferential operators with a principal symbol ξ^2+x^2. On this basis one proves an equiconvergence theorem for Fourier series with respect to the eigenfunctions, which generalizes the well-known theorem of Szegő [1] on equiconvergency of Hermite series.

1. Пусть $A = a(x,D_x)$ — существенно самосопряженный в $L^2(\mathbb{R})$ псевдодифференциальный оператор с полным символом $a(x,\xi) = \xi^2 + x^2 + b(x,\xi)$. Будем предполагать, что функция $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет оценке

$$(\mathrm{H}_1) \qquad |\partial^\alpha b(x,\xi)| \leqq C_\alpha(1+|x|+|\xi|)^{-|\alpha|}, \qquad (x,\xi)\in\mathbb{R}^2,\ C_\alpha>0,$$

либо асимптотике

$$(\mathrm{H}_2) \qquad b(x,\xi) \sim \sum_{k\geqq 0} b_k(x,\xi) \quad \text{и} \quad b_0(x,-\xi) = -b_0(x,\xi),\ x\neq 0,$$

где $b_k \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ имеет свойство однородности:

$$b_k(\sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}\xi) = \lambda^{-k} b_k(x,\xi), \quad \lambda > 0,\ k \geqq 0. \tag{1}$$

Так как оператор A — глобально эллиптический, то его спектр состоит только из собственных чисел конечной кратности $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots, \lambda_j \to +\infty$, поэтому его спектральная функция $e(\lambda, x, y)$ определяется равенством

$$e(\lambda, x, y) = \sum_{\lambda_j \leqq \lambda} \bar{\varphi}_j(x)\varphi_j(y), \tag{2}$$

где $\{\varphi_j\}$ — полная ортонормированная система собственных функций [2]. Отметим, что $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Рассмотрим функцию $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и ее ряд Фурье

$$f(y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(y), \quad a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{\varphi}_n(x)\,dx \tag{3}$$

по собственным функциям $\{\varphi_n\}$. Согласно (2) n-ая частичная сумма $s_n(f,y) = \sum\limits_{\lambda_k \leqq n} a_k\varphi_k(y)$ представляется в виде

$$s_n(f,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e(n; x, y)\,dx. \tag{4}$$

Цель работы найти равномерную асимптотику спектральной функции $e(\lambda, x, y)$ при $\lambda \to +\infty$, $x, y \in \mathbb{R}$, и на основе формулы (4) доказать следующую теорему о равносходимости.

Теорема о равносходимости. *Пусть оператор A удовлетворяет предположению (H_1) и функция $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ обладает свойствами:*

$$\int_{|x|>1} |x|^{-1}|f(x)|\,dx < \infty; \tag{S_1}$$

$$\int a(\lambda, x)(1 - x^2/\lambda)^{-1/4}|f(x)|\,dx = o(\lambda^{1/2}), \quad \lambda \to +\infty, \tag{S_2}$$

где $a(\lambda, x)$ — характеристическая функция множества $\{x : (1-\delta)\lambda < x^2 < \lambda - \lambda^{1/3+\delta}\}$ и

$$\int b(\lambda, x)|f(x)|\,dx = o(\lambda^{1/3}), \quad \lambda \to +\infty, \tag{S_3}$$

где $b(\lambda, x)$ — характеристическая функция множества $\{x : \lambda - \lambda^{1/3+\delta} < x^2 < \lambda + \lambda^{1/3+\delta}\}$ для некоторого $\delta > 0$.

Тогда имеет место следующее утверждение о равносходимости:

$$s_n(f,y) - \frac{1}{\pi}\int_{y-\delta}^{y+\delta} f(x)\frac{\sin\sqrt{n}(x-y)}{x-y}\,dx = o(1), \quad n \to +\infty, \tag{5}$$

где $o(1)$ — локально равномерно по отношению к параметру $y \in \mathbb{R}$.

Замечание 1. Если $b = 0$, то ряд Фурье (3) для функции f соответствует ряду Фурье по полиномам Эрмита для функции $f(x)e^{x^2/2}$. В этом случае теорема о равносходимости доказана в [5] и обобщает соответствующий результат Сеге [1, стр. 245].

Сформулируем полученные результаты об асимптотике спектральной функции $e(\lambda, x, y)$. Более удобно выписывать асимптотику функции

$$E(\lambda, x, y) = e(\lambda, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y), \quad \lambda \to +\infty. \tag{6}$$

Ввиду ее симметричности по переменным x, y будем предполагать, что $y^2 \leqq x^2$. Тогда достаточно рассмотреть следующие случаи:

1) $x^2 \leqq 1 - \delta$, $\delta > 0$; 2) $1 - \delta \leqq x^2 \leqq 1$;

3) $1 \leqq x^2 \leqq 1 + \lambda^{-2/3+\sigma}$, $\sigma > 0$; 4) $x^2 \geqq 1 + \lambda^{-2/3+\sigma}$.

Теорема 1 (случай $x^2 \leqq 1 - \delta$, $\delta > 0$). *Пусть оператор A удовлетворяет предположению* (H_1). *Тогда для любого малого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ так, чтобы:*

(i) *Если $|x - y| \leqq \varepsilon$, то имеет место равномерная асимптотика*

$$E(\lambda, x, y) = (\lambda\omega)^{-1/2}(2\pi t)^{-1} \sin \lambda\psi(t, \xi, x, y) + O(\lambda^{-1/2}), \quad \lambda \to +\infty, \tag{7}$$

где $\cos 2t = xy + \omega$, $\omega = \left[(1 - x^2)(1 - y^2)\right]^{1/2}$, $\xi = (1 - y^2)^{1/2}$ *и*

$$\psi(t, \xi, x, y) = t + \varphi(t, \xi, x) - \xi y, \tag{8}$$

$$\varphi(t, \xi, x) = -\frac{1}{2}(x^2 + \xi^2) \operatorname{tg} 2t + x\xi(\cos 2t)^{-1}; \tag{9}$$

(ii) *Если $|x - y| > \varepsilon$, то выполнена равномерная оценка*

$$E(\lambda, x, y) = O(\lambda^{-1/2}), \quad \lambda \to +\infty. \tag{10}$$

Следствие 1. *Пусть оператор A удовлетворяет предположению* (H_1). *Если $c < x^2 < (1 - \delta)\lambda$, где $\delta > 0$ мало и $y^2 < c/2$, то*

$$|e(\lambda, x, y)| \leqq \mathrm{const}\, |x|^{-1}. \tag{11}$$

Замечание 2. В классическом случае, когда $x^2 + y^2 < \mathrm{const}$ имеем более простой результат [3]:

$$e(\lambda, x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x - y)}{x - y} + O(1), \quad \lambda \to +\infty, \tag{12}$$

равномерно на компактах.

Теорема 2 (случай $1 - \delta \leqq x^2 \leqq 1$). *Существуют числа $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что:*

(i) *Если $|x - y| \leqq \varepsilon$ и оператор A удовлетворяет предположению* (H_2), *то имеем равномерную асимптотику*

$$E(\lambda, x, y) = a(\lambda, x, y)\lambda^{-1/2} + (b(\lambda, x, y) + c(\lambda, x, y))\, O(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda \to +\infty, \tag{13}$$

где

$$a(\lambda, x, y) = \frac{1}{x - y}\left[A_i\left(-B_1\lambda^{2/3}\right) A_i'\left(-B_2\lambda^{2/3}\right) - A_i'\left(-B_1\lambda^{2/3}\right) A_i\left(-B_2\lambda^{2/3}\right)\right], \tag{14}$$

$$(15)\qquad b(\lambda,x,y)=(b(\lambda,x)b(\lambda,y))^{1/2},\quad c(\lambda,x,y)=(c_1(\lambda,x,y)c_2(\lambda,x,y))^{1/2},$$

$$(16)\qquad b(\lambda,x)=\left(A_i\left(-B(x)\lambda^{2/3}\right)\right)^2+\lambda^{-2/3}\left(A_i'\left(-B(x)\lambda^{2/3}\right)\right)^2,$$

$$(17)\qquad c_j(\lambda,x)=\left(A_i\left(-B_j\lambda^{2/3}\right)\right)^2+\lambda^{-2/3}\left(A_i'\left(-B_j\lambda^{2/3}\right)\right)^2,\quad j=1,2.$$

Здесь $B_j=B_j(x,y)$ являются гладкими функциями со свойствами:

$$(18)\qquad \begin{cases} B_1(x,y)=4^{-1/3}(1-y^2)+O\left(r(x,y)\right), \\ B_2(x,y)=4^{-1/3}(1-x^2)+O\left(r(x,y)\right), \end{cases}\qquad r(x,y)\to 0,$$

где $r(x,y)=(1-x^2)^2+(x-y)^2$. При этом $B(x)=B_1(x,x)=B_2(x,x)$ и $A_i(s)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(st+t^3/3)}dt$ есть функция Эйри;

(ii) *Если $|x-y|>\varepsilon$ и оператор A удовлетворяет предположению* (H$_1$), *то выполнена равномерная оценка*

$$(19)\qquad E(\lambda,x,y)=b(\lambda,x,y)O(\lambda^{-1/6}),\quad \lambda\to+\infty.$$

Замечание 3. При $y=x$ имеем равенство

$$(20)\qquad a(\lambda,x,x)=\left(\frac{1-x^2}{B(x)}\right)^{1/2}f\left(-B(x)\lambda^{2/3}\right)\lambda^{2/3},$$

где $f(s)=-s\left(A_i(s)\right)^2+\left(A_i'(s)\right)^2$, в частности $f(s)=\dfrac{1}{\pi}(-s)^{1/2}+O\left(|s|^{-1}\right)$ при $s\to-\infty$.

Следствие 2. *Пусть оператор A удовлетворяет предположению* (H$_1$). *Если $(1-\delta)\lambda<x^2<\lambda-\lambda^{1/3+\delta}$, где $\delta>0$ достаточно мало и $y^2<c$, то*

$$(21)\qquad |e(\lambda,x,y)|\le \mathrm{const}\,(1-x^2/\lambda)^{-1/4}\lambda^{-1/2}.$$

Теорема 3 (случай $1\le x^2\le 1+\lambda^{-2/3+\sigma}$, $\sigma>0$). *Для любого малого $\sigma>0$ существует $\varepsilon>0$ так, чтобы:*

(i) *Если $|x-y|\le\varepsilon$ и оператор A удовлетворяет предположению* (H$_2$), *то выполнена равномерная асимптотика*

$$(22)\qquad E(\lambda,x,y)=a(\lambda,x,y)\lambda^{-1/2}+O(\lambda^{-1/6}),\quad \lambda\to+\infty,$$

где функция a дается формулой (14);

(ii) *Если $|x-y|>\varepsilon$ и оператор A удовлетворяет предположению* (H$_1$), *то имеют место равномерные оценки:*

$$(23)\qquad E(\lambda,x,y)=\sqrt{b(\lambda,y)}O(\lambda^{-1/6}),\qquad \text{если } y^2\le 1,$$

$$(24)\qquad E(\lambda,x,y)=O(\lambda^{-1/6}),\qquad \text{если } y^2\ge 1,$$

Следствие 3. *Пусть оператор A удовлетворяет предположению* (H$_1$). *Если $\lambda-\lambda^{1/3+\delta}\le x^2\le\lambda+\lambda^{1/3+\delta}$, где $\delta>0$ мало и $y^2<c$, то*

$$(25)\qquad |e(\lambda,x,y)|\le \mathrm{const}\,\lambda^{-1/3}.$$

Теорема 4 (случай $x^2 \geq \lambda + \lambda^{1/3+\sigma}$, $\sigma > 0$). *Если оператор A удовлетворяет предположению* (H_1), *то имеет место равномерная оценка*

$$e(\lambda, x, y) = O\left(|x|^{-\infty}\right). \tag{26}$$

2. Доказательство теоремы 1. Будем использовать формулу

$$\int \rho(\lambda-\mu)\, de(\mu, x, y) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\lambda t}\hat{\rho}(t) U(t, x, y)\, dt, \tag{27}$$

где ρ — положительная, четная, быстро убывающая функция, чье преобразование Фурье $\hat{\rho}$ имеет компактный носитель, $\hat{\rho}(t) = 1$ в некоторой окрестности нуля и $U(t, x, y)$ является ядром оператора $U(t) = \exp(-itA)$. Согласно [2] можно построить аппроксимацию этого оператора в виде

$$Q(t)\hat{u}(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\varphi(t,\xi,x)} q(t, \xi, x)\hat{u}(\xi)\, d\xi, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \tag{28}$$

где фаза φ дается формулой (9). В случае предположения (H_1) гладкая функция $\partial_t^k q(t, \xi, x)$, $k \geq 0$ удовлетворяет оценкам (H_1) при $|t| \leq \pi/8$ и $q(0, \xi, x) = 1$. В случае предположения (H_2) имеем асимптотическое равенство $q(t, \xi, x) \sim \sum_{k \geq 0} q_k(t, \xi, x)$, где функция $(\xi, x) \to q_k(t, \xi, x)$ является положительно однородной степени $-2k$, гладкой при $(\xi, x) \neq 0$ и $q_k(0, \xi, x) = 0$, $k \geq 1$,

$$\partial_t q_0 + 2\xi\partial_x q_0 + (ib_0(x, \xi) - \operatorname{tg} 2t)\, q_0 = 0, \quad q_0(0, \xi, x) = 1. \tag{29}$$

Далее, из (27) и (28) следует

$$\int \rho(\lambda-\mu)\, de(\mu, x, y) \sim \frac{1}{4\pi^2}\int e^{i(\lambda t + \varphi(t,\xi,x) - \xi y)} q(t, \xi, x)\hat{\rho}(t)\, dt\, d\xi, \tag{30}$$

где эквивалентность „$A(\lambda, x, y) \sim B(\lambda, x, y)$“ означает, что $A(\lambda, x, y) - B(\lambda, x, y) = O\left((|\lambda| + x^2 + y^2)^{-\infty}\right)$. Очевидно

$$\int \rho(\lambda-\mu)\, de(\mu, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y) \sim \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2}\int e^{i\lambda\psi(t,\xi,x,y)} q(t, \sqrt{\lambda}\xi, \sqrt{\lambda}x)\hat{\rho}(t)\, dt\, d\xi,$$

где функция ψ дается формулой (8). Так как имеет место оценка $|\partial_t\psi(t, \xi, x, y)| \geq c(\xi^2 + x^2)$ при больших ξ^2, если $|t| \leq T$ и T — достаточно мало, то можно интегрировать по частям. Предполагая, что $\operatorname{supp}\hat{\rho} \subset (-T, T)$, получаем

$$\int \rho(\lambda-\mu)\, de(\mu, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y) \sim \sqrt{\lambda}\int e^{i\lambda\psi(t,\xi,x,x)} r_0(t, \xi, x, \lambda)\, dt\, d\xi, \tag{31}$$

где $r_0(t, \xi, x, \lambda) = (2\pi)^{-2} q(t, \sqrt{\lambda}\xi, \sqrt{\lambda}x)\hat{\rho}(t)\kappa(\xi)$ и $\kappa \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ есть срезающая функция. Далее,

$$\int \rho(\lambda-\mu)\, de(\mu, x, y) \sim \int e^{i(x-y)\xi} g(\xi, x, \lambda)\, d\xi, \tag{32}$$

где функция $g(\xi,x,\lambda) = (2\pi)^{-2}\int e^{i(\lambda t+\varphi(t,\xi,x)-\xi x)}\hat\rho(t)q(t,\xi,x)\,dt$ допускает оценку вида $|g(\xi,x,\lambda)| \leqq C_N(|\lambda| + \xi^2)^{-N}$ для любого $N > 0$, если $\lambda < 0$ и ξ^2 — большое. Поэтому, интегрируя по частям в правом интеграле в формуле (32), а затем интегрируя по λ, находим при $y^2 \leqq x^2$ формулу

$$(33)\qquad E_\rho(\lambda,x,y) \sim \frac{1}{x-y}\int e^{i\lambda\psi(t,\xi,x,y)} r(t,\xi,x,\lambda)\,dt\,d\xi,$$

где

$$r(t,\xi,x,\lambda) = \frac{\kappa(\xi)}{4\pi^2}\frac{\hat\rho(t)}{t}\left[\sqrt{\lambda}i(\partial_\xi\varphi - x)q(t,\sqrt{\lambda}\xi,\sqrt{\lambda}x) + (\partial_\xi q)(t,\sqrt{\lambda}\xi,\sqrt{\lambda}x)\right]$$

и

$$E_\rho(\lambda,x,y) = \int \rho(\lambda-\mu)\,de(\mu,\sqrt{\lambda}x,\sqrt{\lambda}y).$$

Чтобы найти асимптотику этой функции при $\lambda \to +\infty$, будем применять метод стационарной фазы [6], [7]. Согласно (8), (9) вещественные критические точки (t,ξ) фазы $(t,\xi) \to \psi(t,\xi,x,y)$ существуют только при $x^2 \leqq 1$, $y^2 \leqq 1$ и даются формулами

$$\cos 2t_1 = xy - \omega,\quad \cos 2t = xy + \omega,\quad \xi = \pm d(y),$$

где $\omega = \left[(1-x^2)(1-y^2)\right]^{1/2}$, $d(y) = (1-y^2)^{1/2}$. При этом,

$$(34)\qquad |t_1|^2 \geqq c[\omega + |x-y|],\quad c_1|x-y| \leqq |t| \leqq c_2|x-y|,\quad c_1 > 0,$$

если $|x-y| \leqq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Выбирая ε и T достаточно маленькими (напомним, что $\operatorname{supp}\hat\rho \subset (-T,T)$ и $\omega \geqq \delta$), можно предполагать, что $\hat\rho(t) = 1$, $\hat\rho(t_1) = 0$. Следовательно на носителе подинтегральной функции в (33) лежат только критические точки $(t, d(y))$ и $(-t,-d(y))$. При этом

$$(35)\qquad \det\psi'' = \partial_t^2\psi\partial_\xi^2\psi - (\partial_{\xi t}^2\psi)^2 = -4\omega(\cos 2t)^{-1}$$

в критических точках. В частности, к интегралу

$$(36)\qquad I(\lambda,x,y) = \int e^{i\lambda\psi(t,\xi,x,y)} r(t,\xi,x,\lambda)\,dt\,d\xi$$

применим метод стационарной фазы [6], откуда

$$(37)\quad I(\lambda,x,y) = (x-y)(2\pi t)^{-1}(\lambda\omega)^{-1/2}\sin\lambda\psi + R(\lambda,x,y)O(\lambda^{-1/2}),\quad \lambda\to+\infty,$$

где $|x-y| \leqq \varepsilon$ и

$$(38)\qquad \partial_y R(\lambda,x,y) = O(1),\quad \lambda\to+\infty.$$

Теперь (33), (35) – (38) показывают, что при $|x-y| \leqq \varepsilon$

$$(39)\quad E_\rho(\lambda,x,y) = (2\pi t)^{-1}(\lambda\omega)^{-1/2}\sin\lambda\psi(t,\xi,x,y) + O(\lambda^{-1/2}),\quad \lambda\to+\infty.$$

Далее,

$$(40)\quad J(\lambda,x) = \int\rho\left(\frac{\lambda-\mu}{k}\right)de(\mu,\sqrt{\lambda}x,\sqrt{\lambda}x) = |k|^m O(\lambda^{-1/2}),\quad \lambda\to+\infty,$$

для некоторого $m > 1$, где $|k| \geqq 1$. Действительно, согласно (31) имеем

$$(41)\qquad J(\lambda,x) \sim \sqrt{\lambda}\int e^{i\lambda\psi(t,\xi,x,x)} h(t,\xi,\lambda)\,dt\,d\xi,$$

где $h(t,\xi,\lambda) = k(2\pi)^{-2}\hat{\rho}(kt)q(t,\sqrt{\lambda}\xi,\sqrt{\lambda}x)\kappa(\xi)$. Так как критические точки фазы ψ невырождены и выполнены оценки (H_1), то (40) верно в силу метода стационарной фазы [7]. Теперь из (40) получаем оценку

$$|e(\lambda+\mu,\sqrt{\lambda}x,\sqrt{\lambda}x) - E(\lambda,x,x)| \leqq c(1+|\mu|)^m\lambda^{-1/2}, \quad \lambda > 1,\ \mu\in\mathbf{R},\ x^2 \leqq 1-\delta,$$

откуда [8]

$$|e(\lambda+\mu,\sqrt{\lambda}x,\sqrt{\lambda}y) - E(\lambda,x,y)| \leqq c(1+|\mu|)^m\lambda^{-1/2}, \quad \lambda > 1,\ \mu\in\mathbf{R},\ y^2 \leqq x^2 \leqq 1-\delta. \tag{42}$$

Наконец (42) и свойство $\hat{\rho}(0) = 1$ влекут

$$E_\rho(\lambda,x,y) - E(\lambda,x,y) = O(\lambda^{-1/2}), \quad \lambda\to+\infty,\ y^2 \leqq x^2 \leqq 1-\delta. \tag{43}$$

Ясно, что асимптотика (7) является следствием (39) и (43).

Остается рассмотреть случай $|x-y| > \varepsilon$. Согласно (34) нет критических точек на носителе подинтегральной функции в (33). Поэтому $E_\rho(\lambda,x,y) = O(\lambda^{-\infty})$, что вместе с (42) доказывает оценку (10).

3. Доказательство теоремы 2. Пусть оператор A удовлетворяет предположению (H_2). Тогда можно использовать однородность функции $q_k(t,\xi,x)$ и написать следующее представление интеграла (36):

$$I(\lambda,x,y) = \sum_{j=0}^{2} I_j(\lambda,x,y) + R(\lambda,x,y), \tag{44}$$

где

$$I_j(\lambda,x,y) = \lambda^{1/2-j}\int e^{i\lambda\psi(t,\xi,x,y)}r_j(t,\xi,x)\,dt\,d\xi, \quad j = 0,\ 1,\ 2, \tag{45}$$

$$\partial_y R(\lambda,x,y) = O(\lambda^{-3/2}), \quad \lambda\to+\infty, \tag{46}$$

$$r_0(t,\xi,x) = i(2\pi)^{-2}t^{-1}\hat{\rho}(t)(\partial_\xi\varphi - x)q_0(t,\xi,x)\kappa(\xi), \tag{47}$$

$$r_j(t,\xi,x) = (2\pi)^{-2}t^{-1}\hat{\rho}(t)\left[i(\partial_\xi\varphi - x)q_j(t,\xi,x) + \partial_\xi q_{j-1}(t,\xi,x)\right]\kappa(\xi), \quad j = 1,\ 2.$$

Чтобы найти равномерную асимптотику интеграла $I_j(\lambda,x,y)$ при $\lambda\to+\infty$, применим теорию версальных деформаций [4], [9]. Сначала отметим, что функция $(t,\xi) \to \psi(t,\xi,x,y)$ аналитична при $|t| < \pi/4$, поэтому ее можно продолжить голоморфно для комплексных значений переменных (t,ξ). Тогда эта функция имеет четыре критические точки $(\pm t,\pm d(y))$ и $(\pm t_1,\pm d(y))$ (см. (34)), которые вещественнозначны при $x^2 \leqq 1$, $y^2 \leqq 1$ и чисто мнимые, если $x^2 > 1$ либо $y^2 > 1$. При $x = y$ и $x^2 = 1$ все эти критические точки сливаются с точкой (0, 0), вырождаясь, а фаза ψ принимает вид

$$\psi(t,\xi,x,x) = -t\left[(\xi - xt)^2 + t^2 g(t,\xi,x)\right], \quad x^2 = 1,$$

поэтому существует голоморфная замена переменных

$$t = \tau p(\tau,\eta), \quad \xi = \xi(\tau,\eta) \tag{48}$$

такая, что

$$\psi(t(\tau,\eta),\xi(\tau,\eta),x,x) = \tau\eta^2 + \tau^3/3, \quad x^2 = 1.$$

Нетрудно убедиться [4], [9], что семейство $\{ct + t\xi^2 + t^3/3\}$ является версальной деформацией функции $t\xi^2 + t^3/3$ в классе всех голоморфных, нечетных функций $g(t,\xi)$, $g(0,\xi) = 0$, определенных в окрестности начала, которые вещественнозначны при вещественных значениях переменных (t,ξ). Этот класс инвариантен относительно нечетных локальных диффеоморфизмов $(\tau,\eta) = v(t,\xi)$, $v(0,\xi) = (0,\eta)$, которые вещественнозначны при вещественных значениях переменных (t,ξ). Следовательно, поскольку функция $\psi(t,\xi,x,x)$ принадлежит этому классу, то существует нечетная голоморфная замена переменных вида (48), для которой

$$\psi(t(\tau,\eta),\xi(\tau,\eta),x,x) = -B_0(x)\tau + \tau\eta^2 + \tau^3/3 \tag{49}$$

если $|x^2 - 1| \leqq \delta$ для некоторого $\delta > 0$. При этом

$$B_0(x) = \left(\frac{3}{2}\psi(t_1(x),d(x),x,x)\right)^{2/3}. \tag{50}$$

Равенство (50) следует из того факта, что критическая точка $(\sqrt{B_0},0)$ является образом критической точки $(t_1(x),d(x))$. В частности,

$$B_0(x) = 1 - x^2 + O\left((1-x^2)^2\right) \qquad \text{при } x^2 \to 1. \tag{51}$$

Далее, линейная замена переменных $\tau \mapsto 4^{-1/3}(\tau+\eta)$, $\eta \mapsto 4^{-1/3}(\tau-\eta)$ приводит функцию (49) к виду

$$\psi(t(\tau,\eta),\xi(\tau,\eta),x,x) = -B(x)(\tau+\eta) + \tau^3/3 + \eta^3/3, \quad |x^2-1| \leqq \delta, \tag{52}$$

где

$$B(x) = 4^{-1/3}B_0(x). \tag{53}$$

В частности,

$$\begin{cases} (\sqrt{B},-\sqrt{B}) & \text{является образом точки } (0,d(x)), \\ (\sqrt{B},\sqrt{B}) & \text{есть образ точки } (t_1(x),d(x)). \end{cases} \tag{54}$$

С другой стороны, семейство $\{-B_1\tau - B_2\eta + \tau^3/3 + \eta^3/3\}$ является версальной деформацией для функции $-B(\tau+\eta) + \tau^3/3 + \eta^3/3$ в классе всех нечетных, гладких функций, определенных в окрестности начала, относительно нечетных локальных диффеоморфизмов. Поэтому существует нечетная замена переменных $(t,\xi) \mapsto (\tau,\eta)$ такая, что

$$\psi(t(\tau,\eta),\xi(\tau,\eta),x,y) = -B_1(x,y)\tau - B_2(x,y)\eta + \tau^3/3 + \eta^3/3, \tag{55}$$

если $|x^2-1| \leqq \delta$, $|x-y| \leqq \varepsilon$ для некоторых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. При этом, $B_1(x,x) = B_2(x,x) = B(x)$. Далее, если δ и ε достаточно малы, то критические точки находятся вблизи начала, поэтому используя принцип стационарной фазы и замену переменных (55), получаем

$$I_j(\lambda,x,y) = \lambda^{1/2-j}\int e^{i\lambda(-B_1\tau - B_2\eta + \tau^3/3 + \eta^3/3)} g_j(\tau,\eta)\, d\tau\, d\eta, \tag{56}$$

где

$$g_j(\tau,\eta) = r_j(t(\tau,\eta),\xi(\tau,\eta),x)J(\tau,\eta) \tag{57}$$

и $J(\tau,\eta)$ является якобианом отображения $(\tau,\eta) \mapsto (t(\tau,\eta),\xi(\tau,\eta))$.

Так как согласно (29) и (H_2) функция g_0 — нечетная, то подготовительная теорема Мальгранжа [7], [9] дает

(58) $$g_0(\tau,\eta) = a_1(x,y)\tau + a_2(x,y)\eta + (\tau^2 - B_1)f_1 + (\eta^2 - B_2)f_2.$$

Таким образом(56) — (58) и интегрировоние по частям влечет

(59) $$I_0(\lambda,x,y) = a(\lambda,x,y)\lambda^{-1/2} + (x-y)c(\lambda,x,y)O(\lambda^{-1/6}) + R_0(\lambda,x,y),$$

где

(60) $$a(\lambda,x,y) = \frac{4\pi^2}{i}\Big[a_1(x,x)A_i'\left(-B_1\lambda^{2/3}\right)A_i\left(-B_2\lambda^{2/3}\right) + a_2(x,x)A_i\left(-B_1\lambda^{2/3}\right)A_i'\left(-B_2\lambda^{2/3}\right)\Big],$$

(61) $$\partial_y R_0(\lambda,x,y) = c(\lambda,x,y)O(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda\to+\infty.$$

При этом здесь были учтены представление $a_j(x,y) = a_j(x,x) + O(x-y)$, неравенство Коши–Буняковского и определения (15), (17). Коэффициенты $a_j(x,x)$ можно подсчитать,используя (58) при $y=x$, откуда $g_0(\sqrt{B},\sqrt{B}) = (a_1(x,x)+a_2(x,x))\sqrt{B}$, $g_0(\sqrt{B},-\sqrt{B}) = (a_1(x,x)-a_2(x,x))\sqrt{B}$, если $x^2 \leqq 1$. Поэтому, учитывая еще (54), (57), (47), заключаем, что $a_1(x,x)+a_2(x,x)=0$ и

(62) $$a_1(x,x) = -i(2\pi)^{-2}d(x)J(\sqrt{B},-\sqrt{B}).$$

Якобиан $J(\sqrt{B},-\sqrt{B})$ можно найти из равенства

(63) $$J^2(\tau,\eta)\det\psi'' = 4\tau\eta,$$

которое выполняется в критических точках и следует из (52). Имея ввиду (54) и (35), из (63) вытекает

(64) $$J(\sqrt{B},-\sqrt{B}) = \sqrt{B}(d(x))^{-1}.$$

Следовательно, (62) и (64) влекут

(65) $$a_1(x,x) = -i/4\pi^2, \quad a_2(x,x) = i/4\pi^2, \quad \text{если } x^2 \leqq 1.$$

Далее, аналогично (59), но отправляясь от представления

$$g_1(\tau,\eta) = b_0 + b_1\tau + b_2\eta + b_3\tau\eta + (\tau^2 - B_1)h_1 + (\eta^2 - B_2)h_2,$$

находим оценку

(66) $$\partial_y I_1(\lambda,x,y) = c(\lambda,x,y)(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda\to+\infty$$

и, тем более, оценку

(67) $$\partial_y I_2(\lambda,x,y) = c(\lambda,x,y)O(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda\to+\infty.$$

Отметим, что $c(\lambda,x,y) \geqq c\lambda^{-2/3}$, $c>0$, как следствие из определений (15), (17) и того факта, что нули функции Эйри и нули ее производной перемежаются. Поэтому (46) переписывается в виде

(68) $$\partial_y R(\lambda,x,y) = c(\lambda,x,y)O(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda\to+\infty.$$

Теперь ясно, что (33), (36), (44), (59) – (61), (65) – (68) влекут асимптотику

(69) $$E_\rho(\lambda, x, y) = a(\lambda, x, y)\lambda^{-1/2} + c(\lambda, x, y)O(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda \to +\infty,$$

где коэффициент a дается формулой (14).

Далее, докажем при условии (H_1), что интеграл (40) допускает оценку

(70) $$J(\lambda, x) = |k|^m b(\lambda, x)O(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda \to +\infty, \quad \text{если } x^2 \leqq 1, \ |k| \geqq 1$$

для некоторого $m > 1$. Действительно, если $x^2 \leqq 1 - \delta$, $\delta > 0$, то имеем оценку (40), а асимптотика функции Эйри [6] и определение (16) показывают, что

(71) $$b(\lambda, x) \geqq c\lambda^{-1/3} \qquad \text{при } 1 - x^2 \geqq \delta > 0.$$

Поэтому в этом случае (70) следует из (40) и (71). Пусть теперь $1 - \delta \leqq x^2 \leqq 1$. Тогда в интеграле (41) можно сделать замену переменных (52), откуда

(72) $$J(\lambda, x) \sim \sqrt{\lambda} \int e^{i\lambda(-B\tau - B\eta + \tau^3/3 + \eta^3/3)} h(\tau, \eta, \lambda)\, d\tau\, d\eta,$$

где

(73) $$h(\tau, \eta, \lambda) = \frac{k}{4\pi^2}\hat{\rho}(kt)q(t, \sqrt{\lambda}\xi, \sqrt{\lambda}x)\kappa(\xi)J(\tau, \eta).$$

Чтобы проследить зависимость от параметра к, будем использовать теорему Мальгранжа в следующей форме:

(74) $$h(\tau, \eta, \lambda) = a(\eta, \lambda) + b(\eta, \lambda)\tau + (\tau^2 - B)f_1(\tau, \eta, \lambda),$$

где

(75) $$a(\eta, \lambda) = \frac{1}{2}\left[h(\sqrt{B}, \eta, \lambda) + h(-\sqrt{B}, \eta, \lambda)\right],$$

(76) $$b(\eta, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{B}}\left[h(\sqrt{B}, \eta, \lambda) - h(-\sqrt{B}, \eta, \lambda)\right],$$

(77) $$f_1(\tau, \eta, \lambda) = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \Big[\partial_\tau^2 h\big(s(1-\sigma)\sqrt{B} + \tau\sigma, \eta, \lambda\big)(1-\sigma) - \partial_\tau^2 h\big(s(1+\sigma)\sqrt{B} + \tau\sigma, \eta, \lambda\big)(1+\sigma)\Big]\, ds\, d\sigma.$$

Аналогично,

(78) $$a(\eta, \lambda) = a_0 + a_2\eta + (\eta^2 - B)h_1(\eta, \lambda),$$

(79) $$b(\eta, \lambda) = a_1 + a_3\eta + (\eta^2 - B)h_2(\eta, \lambda).$$

Поэтому,

(80) $$h(\tau, \eta, \lambda) = a_0 + a_1\tau + a_2\eta + a_3\tau\eta + (\tau^2 - B)f_1 + (\eta^2 - B)f_2,$$

где

(81) $$f_2(\tau, \eta, \lambda) = h_1(\eta, \lambda) + \tau h_2(\eta, \lambda).$$

В частности, (73) – (81) дают оценки

$$a_j = O\left(|k|^3\right), \quad 0 \leqq j \leqq 3, \tag{82}$$

$$\partial^\alpha f_j = O\left(|k|^{|\alpha|+4}\right), \quad j = 1, 2. \tag{83}$$

Теперь (70) следует из (72), (80), (82), (83), учитывая (H_1) и определение (16). Из (70) вытекает оценка

$$\left|e(\lambda+\mu, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}x) - E(\lambda, x, x)\right| \leqq c(1+|\mu|)^m b(\lambda, x)\lambda^{-1/6}, \quad \mu \in \mathbf{R},\ x^2 \leqq 1,$$

откуда

$$\left|e(\lambda+\mu, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y) - E(\lambda, x, y)\right| \leqq c(1+|\mu|)^m b(\lambda, x, y)\lambda^{-1/6}, \quad \mu \in \mathbf{R},\ y^2 \leqq x^2 \leqq 1,$$

поэтому, учитывая и равенство $\hat{\rho}(0) = 1$, получаем

$$E_\rho(\lambda, x, y) - E(\lambda, x, y) = b(\lambda, x, y)O(\lambda^{-1/6}), y^2 \leqq x^2 \leqq 1. \tag{84}$$

Сравнивая (69) и (84), находим асимптотику (13). Если же $|x-y| > \varepsilon$, то $E_\rho(\lambda, x, y) = O\left(\lambda^{-\infty}\right)$, что вместе с (84) доказывает оценку (19).

Остается проверить асимптотики (18). Из (55) и (8), (9) следует

$$\begin{cases} -B_1(x,y) = (1-x^2)\dfrac{\partial t}{\partial \tau}(0,0,x,y) + (x-y)\dfrac{\partial \xi}{\partial \tau}(0,0,x,y), \\ -B_2(x,y) = (1-x^2)\dfrac{\partial t}{\partial \eta}(0,0,x,y) + (x-y)\dfrac{\partial \xi}{\partial \eta}(0,0,x,y). \end{cases} \tag{85}$$

В частности, $-B(x) = (1-x^2)\dfrac{\partial t}{\partial \tau}(0,0,x,x) = (1-x^2)\dfrac{\partial t}{\partial \eta}(0,0,x,x)$, что вместе с (53), (51) дает

$$\frac{\partial t}{\partial \eta}(0,0,x,x) = \frac{\partial t}{\partial \tau}(0,0,x,x) = -4^{-1/3} + O(1-x^2) \qquad \text{при } x^2 \to 1. \tag{86}$$

С другой стороны, из (55) и (8), (9) следует также

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial \tau}(0,0,x,x) = 2x\dfrac{\partial t}{\partial \tau}(0,0,x,x) + O(1-x^2), \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial \eta}(0,0,x,x) = O(1-x^2) \end{cases} \qquad \text{при } x^2 \to 1. \tag{87}$$

Поэтому (86), (87) и формула Тейлора дают

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial \tau}(0,0,x,y) = -4^{-1/3} + O(1-x^2+|x-y|), \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial \tau}(0,0,x,y) = -4^{-1/3}2x + O(1-x^2+|x-y|), \\ \dfrac{\partial t}{\partial \eta}(0,0,x,y) = -4^{-1/3} + O(1-x^2+|x-y|), \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial \eta}(0,0,x,y) = O(1-x^2+|x-y|). \end{cases} \tag{88}$$

Теперь ясно, что (85) и (88) влекут асимптотики (18). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство следствия 2. При условиях следствия 2 выполнена оценка (19). Так как $(1-x^2)\lambda^{2/3} \geq \lambda^\delta$, то используя асимптотику функции Эйри и учитывая (16), получаем

(89) $$b(\lambda, x) = (1-x^2)^{-1/2}O(\lambda^{-1/3}), \qquad \text{если } (1-x^2)\lambda^{2/3} > \lambda^\delta,\ \delta > 0,$$

(90) $$b(\lambda, y) = O(\lambda^{-1/3}), \qquad \text{если } y^2 < 1-\delta.$$

Теперь оценка (21) следует из (19), (15), (16) и (89), (90).

5. Доказательство теоремы 3. Как и при доказательстве теоремы 2 мы имеем (59)–(61). Но в случае $x^2 > 1$ вещественные критические точки фазы ψ исчезают, поэтому коэффициенты $a_j(x,x)$ нельзя подсчитать как раньше. Однако можно заметить, что (65) и формула Тейлора дают асимптотики

(91) $$\begin{cases} a_1(x,x) = -i/4\pi^2 + O(x^2-1), \\ a_2(x,x) = i/4\pi^2 + O(x^2-1) \end{cases} \qquad \text{при } x^2 \to 1.$$

Так как $x^2 - 1 \leq \lambda^{-2/3+\delta}$ и $\delta > 0$ достаточно мало, то из (59)–(61), (91), (66)–(68), (33), (36), (44), учитывая оценку $c(\lambda, x, y) \leq \mathrm{const}$, получаем

(92) $$E_\rho(\lambda, x, y) = a(\lambda, x.y)\lambda^{-1/2} + O(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda \to +\infty.$$

Далее, применяя в формуле (31) замену переменных (52), получаем оценку

$$\int \rho(\lambda-\mu)\,de(\mu, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}x) = O(\lambda^{-1/6}), \quad \lambda \to +\infty,\ 1 \leq x^2 \leq 1+\delta.$$

только при условии (H_1), откуда

(93) $$|e(\lambda+\sigma, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}x) - E(\lambda, x, x)| \leq c.\lambda^{-1/6}, \text{ если } |\sigma| \leq 1,\ 1 \leq x^2 \leq 1+\delta.$$

С другой стороны, обычные оценки собственных чисел и собственных функций оператора A [2] показывают, что

(94) $$|e(\lambda, x, y)| \leq c(1+|\lambda|)^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Поэтому

(95) $$E_\rho(\lambda, x, y) - E(\lambda, x, y) = \int_0^{\lambda/2} [\Delta(\mu)E + \Delta(-\mu)E]\rho(\mu)\,d\mu + O(\lambda^{-\infty}),$$

где $\Delta(\mu)E = e(\lambda+\mu, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y) - E(\lambda, x, y)$. Чтобы оценить $\Delta(\pm\mu)E$ при $0 < \mu < \lambda/2$ будем использовать (93) при $x^2 \geq 1$, $y^2 \geq 1$ и (70) при $y^2 \leq 1$. В результате получаем

(96) $$|\Delta(\pm\mu)E| \leq c(1+|\mu|)^m\lambda^{-1/6}, \quad 0 < \mu < \lambda/2.$$

Теперь (92) и (95), (96) доказывают асимптотику (22).

Наконец, если $|x-y|>\varepsilon$, то $E_\rho(\lambda,x,y)=O(\lambda^{-\infty})$. В случае $y^2\geqq 1$ оценка (24) следует отсюда и (95), (96). Если же $y^2<1$, то (70) и (93) влекут оценку

$$(97)\qquad |\Delta(\pm\mu)E|\leqq c(1+|\mu|)^m\sqrt{b(\lambda,y)}\lambda^{-1/6},\quad \text{если } 0<\mu<\lambda/2.$$

Поэтому (23) следует из (95) и (97). Теорема 3 доказана.

6. Доказательство следствия 3. При условиях этого следствия имеют место оценки (19) или (23) соответственно. Так как $b(\lambda,x)\leqq \mathrm{const}$ и выполнено (90), то $E(\lambda,x,y)=O(\lambda^{-1/3})$, откуда (25) следует.

7. Доказательство теоремы 4. Учитывая (94), достаточно оценить функцию $e(\lambda,x,x)$. Для этого будем использовать представление

$$(98)\qquad E_\rho(\lambda,x,x)\sim\lambda^{1/2}\int e^{i\lambda\psi(t,\xi,x,x)}g(t,\sqrt{\lambda}\xi,\sqrt{\lambda}x)\kappa(\xi)\,dt\,d\xi,$$

где
$$g(t,\xi,x)=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\hat\rho(t)}{t}\left[\xi(x-\partial_\xi\varphi)q(t,\xi,x)+i\xi\partial_\xi q(t,\xi,x)\right],$$

которое выводится из (32) аналогично (33) (или прямо из (33)). Если $|x^2-1|\leqq\delta$, то можно сделать замену переменных (52) и получить оценку

$$(99)\qquad E_\rho(\lambda,x,x)=b(\lambda,x)O(\lambda^{1/6}),\quad \lambda\to+\infty.$$

Так как $(x^2-1)\lambda^{2/3}\geqq\lambda^\sigma$, $\sigma>0$, то асимптотика функции Эйри и (16), (18) показывают, что $b(\lambda,x)=O(\lambda^{-\infty})$, следовательно (99) переписывается в виде

$$(100)\qquad \int\rho(\lambda-\mu)e(\mu,x,x)\,d\mu=O(|x|^{-\infty}),\quad \lambda+\lambda^{1/3+\sigma}\leqq x^2\leqq(1+\delta)\lambda.$$

Аналогично,

$$(101)\qquad \int\rho(\lambda-\mu)\,de(\mu,x,x)=O(|x|^{-\infty}),\quad \lambda+\lambda^{1/3+\sigma}\leqq x^2\leqq(1+\delta)\lambda.$$

Пусть теперь $x^2\geqq 1+\delta$. Тогда фазовая функция ψ не имеет вещественных критических точек и

$$(102)\qquad |\partial_t\psi|+|\partial_\xi\psi|\geqq c.x^2,\quad c>0.$$

Действительно, если $1+\delta\leqq x^2\leqq b$, то (102) очевидно выполнено. Если же $x^2\geqq b$ и b — достаточно большое число, то (102) следует из неравенства $|\partial_t\psi|\geqq c(x^2+\xi^2-1)$, где $|t|<T$ и T достаточно мало. Оценка (102) позволяет интегрировать по частям в интеграле (98), что в итоге приводить снова к оценкам (100) и (101). Таким образом они доказаны при $x^2>\lambda+\lambda^{1/3+\sigma}$, $\sigma>0$. Наконец из (100) и (101) следует оценка $e(\lambda,x,x)=O(|x|^{-\infty})$ стандартным образом. Теорема 4 доказана.

8. Доказательство теоремы о равносходимости. Следуя схеме доказательства теоремы о равносходимости из [1, стр. 264], достаточно установить оценку вида

$$R_n(f,y) = O(1)\left(\int\limits_{|x|>1} |x|^{-1}|f(x)|\,dx + \int\limits_{x^2<c} |f(x)|\,dx\right) + o(1) \tag{103}$$

при $n \to +\infty$, $y^2 < c/2$, где $c > 1$ и

$$R_n(f,y) = s_n(f,y) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{y-\delta}^{y+\delta} f(x)\frac{\sin\sqrt{n}(x-y)}{x-y}\,dx.$$

Именно, соотношение (5) верно для каждой собственной функции, следовательно для плотного в $L^2(\mathbb{R})$ множества функций $\{f\}$. С другой стороны, нетрудно сообразить, что функцию класса

$$\left\{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \,:\, \int\limits_{|x|>1} |x|^{-1}|f(x)|\,dx + \int\limits_{x^2<c} |f(x)|\,dx < \infty\right\}$$

можно аппроксимировать линейными комбинациями собственных функций.

Далее, (4) и (12) показывают, что

$$R_n(f,y) = O(1)\left(\int\limits_{x^2<c} |f(x)|\,dx + \int\limits_{x^2>c} f(x)e(n,x,y)\,dx\right), \quad y^2 < c/2. \tag{104}$$

Поэтому остается оценить интегралы

$$K_j(\lambda,y) = \int a_j(\lambda,x)f(x)e(\lambda,x,y)\,dx, \quad 1 \le j \le 4, \tag{105}$$

где $a_1(\lambda,x)$ — характеристическая функция множества $\{x : c < x^2 < (1-\delta)\lambda\}$, $\delta > 0$; $a_2(\lambda,x) = a(\lambda,x)$, $a_3(\lambda,x) = b(\lambda,x)$ и $a_4(\lambda,x)$ — характеристическая функция множества $\{x : x^2 > \lambda + \lambda^{1/3+\delta}\}$.

a) Оценка интеграла K_1 делается с помощью следствия 1:

$$K_1(\lambda,y) = O(1)\int\limits_{|x|>1} |x|^{-1}|f(x)|\,dx, \quad y^2 < c/2. \tag{106}$$

b) Оценка интеграла K_2 следует из (21) и (S_2):

$$K_2(\lambda,y) = o(1), \quad \lambda \to +\infty,\ y^2 < c. \tag{107}$$

c) К интегралу K_3 применяем следствие 3 и (S_3):

$$K_3(\lambda,y) = o(1), \quad \lambda \to +\infty,\ y^2 < c. \tag{108}$$

d) Интеграл K_4 оценивается с помощью теоремы 4:

$$K_4(\lambda, y) = O(1) \int\limits_{|x|>1} |x|^{-1} |f(x)|\, dx. \tag{109}$$

Теперь ясно, что оценка (103) следует из (104)–(109). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Szegö, G. Orthogonal polynomials. AMS, 1959.
2. Helffer, B. Theorie spectrale pour des operateurs globalement elliptiques. — Asterisque, 112, 1984.
3. Hörmander, L. The spectral function of an elliptic operator. — *Acta Math.*, 121, 1968, 173–218.
4. Poenaru, V. Singularites en presence de symetrie. Lect. notes in mathem. 510, Springer – Verlag, 1976.
5. Караджов, Г. Е. О равносходимости рядов Эрмита. — *Сердика*, 16, 1990, 217–229.
6. Федорюк, М. В. Метод перевала. М., 1977.
7. Хермандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1, М., 1986.
8. Шубин, М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М., 1978.
9. Арнольд, В. И., А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. М., 1982.

Поступила 21.05.1990