

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mecanique

Tome 84, 1990

ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С УПРАВЛЯЕМЫМИ НЕГОЛОНОМНЫМИ СИСТЕМАМИ

СОНЯ ДЕНЕВА, ВАСИЛ ДИАМАНДИЕВ

Соня Денева, Васил Диамандиев. ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С УПРАВЛЯЕМЫМИ НЕГОЛОНОМНЫМИ СИСТЕМАМИ

В работе рассмотрены примеры нелинейных неголономных связей первого порядка.

Sonia Deneva, Vasil Diamandiev. PROBLEMS, CONNECTED WITH CONTROLLED NON-HOLONOMIC CONSTRAINTS

In this paper some examples of nonholonomic systems with nonlinear constraints are examined.

В настоящей работе рассматриваются неголономные системы из взаимосвязанных твердых тел, которые часто применяются в технике. Как показал Н. Кирчетов [1], для управления движением механической системы могут быть использованы т. н. управляемые связи. Кроме силового, возможно также и кинематическое управление движением, основанное на выборе соответствующих режимов изменения управляемых связей. В технике можно указать на целые области применения кинематических управляемых систем, но теоретически это направление еще не достаточно развито. Как первый пример в предлагаемой работе рассматривается редуктор с переменным числом передач. Он состоит из двух валов, которые связаны между собой колесом передачи радиуса r (рис. 1). Вал C , жестко связанный с колесом передачи, вращается около своей оси с угловой

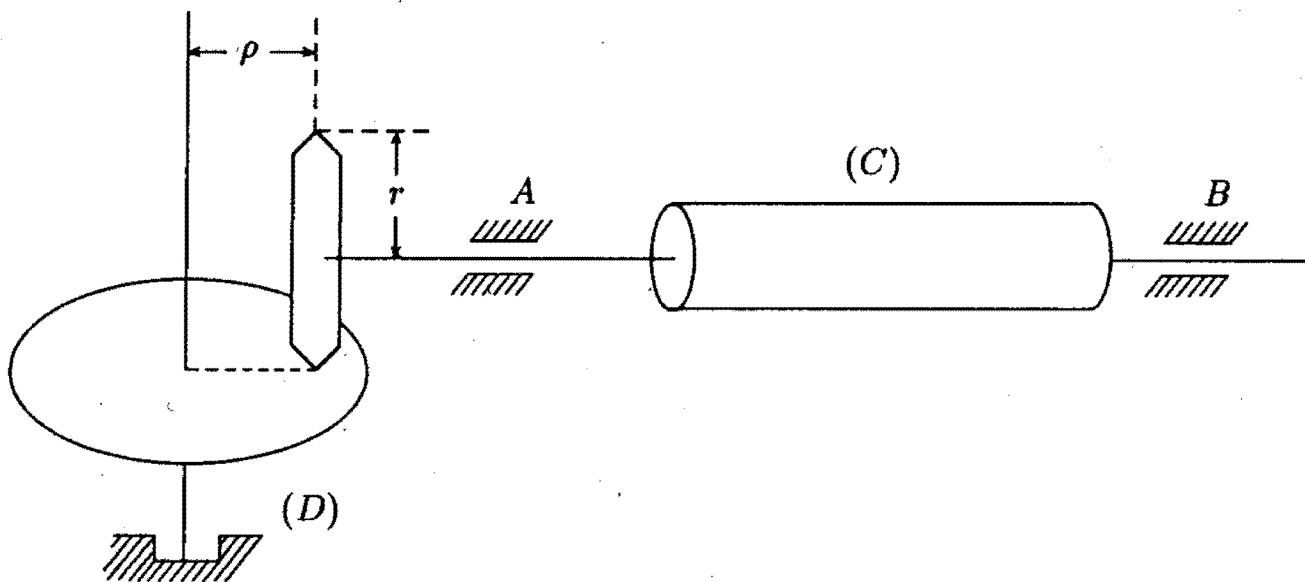


Рис. 1

скоростью $\dot{\varphi}_1$. Колесо своим острым краем зацепляется за маховик вала D и приводит его во вращение с угловой скоростью $\dot{\varphi}_2$. Вращаясь, вал C может перемещаться поступательно по своей оси так, что расстояние ρ от точки контакта колеса с маховиком до оси последнего является некоторой функцией времени, т. е.

$$(1) \quad \rho = \rho(t).$$

Так как в направлении вращения колесо не проскальзывает, то в его точке контакта с маховиком линейные скорости двух вращательных движений одинаковы, т. е. имеем

$$(2) \quad r\dot{\varphi}_1 = \rho(t)\dot{\varphi}_2.$$

Очевидно, неголономная связь системы (2) неинтегрируема. Параметрами системы являются величины φ_1 , φ_2 и ρ . Из-за соотношения (2) только два из них независимы.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$(3) \quad T = \frac{J_1}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{J_k}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{J_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m}{2}\dot{\rho}^2,$$

где J_1 и J_2 — моменты инерции валов относительно их оси, J_k — момент инерции колеса передачи относительно его центра, m — сумма масс первого вала и колеса. Элементарная работа, действующих на систему сил, записывается следующим образом:

$$(4) \quad \delta A = M\delta\varphi_1 + F\delta\rho,$$

где $M(t)$ — крутящий момент вала C , $F(t)$ — сила, создающая поступательное движение оси вала. Величины $M(t)$ и $F(t)$ зависят от управляемых извне связей системы. Из уравнения (4) находим обобщенные силы в виде

$$(5) \quad Q_{\varphi_1} = M, \quad Q_{\varphi_2} = 0, \quad Q_{\rho} = F.$$

К рассматриваемой системе применяются уравнения движения для неголономных систем в форме [2]:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) + \sum_{\mu=k+1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \frac{\partial q_\mu}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \sum_{\mu=k+1}^l \frac{\partial T}{\partial q_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{q}_r} = Q_r + \sum_{\mu=k+1}^l Q_\mu \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{q}_r}.$$

Из (2) получим

$$(7) \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\rho}{r} \dot{\varphi}_2,$$

т. е. рассматриваем φ_2 как независимый параметр.

В нашем случае уравнения (6) принимают вид

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) \frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\varphi}_2} &= Q_{\varphi_2} + Q_{\varphi_1} \frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\varphi}_2}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) \frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\rho}} &= Q_\rho + Q_{\varphi_1} \frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\rho}}. \end{aligned}$$

Из соотношений (3), (5) и (7) от (8) находим

$$(9) \quad J_2 \ddot{\varphi}_2 + (J_1 + J_k) \dot{\varphi}_1 \frac{\rho}{r} = M \frac{\rho}{r}; \quad m \ddot{\rho} = F.$$

К (9) следует прибавить (7), в результате чего получаем три уравнения для параметров φ_1 , φ_2 и ρ как функции управляющих воздействий F и M .

Остановимся на частном случае, когда $\dot{\varphi}_2 = \omega = \text{const}$. Из (9) и (7) получим

$$(J_1 + J_k) \frac{\omega \dot{\rho}}{r} = M(t)$$

или для трансляционного движения будем иметь

$$(10) \quad \rho(t) = \rho_0 + \frac{r}{\omega(J_1 + J_k)} \int_0^t M(t) dt.$$

Из (7) находим

$$(11) \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\omega}{r} \left[\rho_0 + \frac{r}{\omega(J_1 + J_k)} \int_0^t M(t) dt \right].$$

Уравнения (10) и (11) выражают трансляционное и вращательное движение вала C в случае равномерного вращения вала D .

В качестве второго примера рассмотрим центробежный регулятор, жестко связанный через колесо с острым краем с вертикальным диском, вращающийся вокруг горизонтальной оси (рис. 2). Регулятор OP_1NP_2

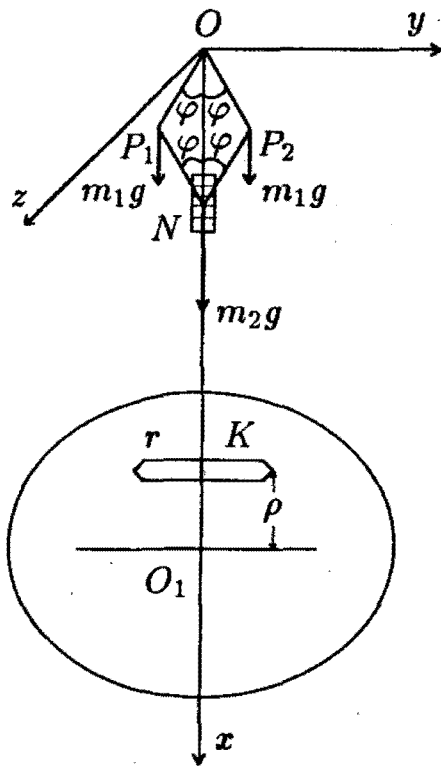


Рис. 2

вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\dot{\varphi}_1$. Вокруг той же оси вращается и колесо K . Шары регулятора P_1 и P_2 , каждый имеющий массу m_1 , закреплены на концах стержней OP_1 и OP_2 , которые в свою очередь шарнирно соединены в точке O . Муфта N массы m_2 может перемещаться вдоль вертикальной оси. Муфта шарнирно соединена со стержнями NP_1 и NP_2 , которые в свою очередь соединены шарнирами со стержнями OP_1 и OP_2 . Кроме того, $OP_1 = OP_2 = NP_1 = NP_2 = l$. Через $\dot{\varphi}_2$ обозначим угловую скорость диска с центром O_1 , который находится на расстоянии ρ от K . Так как колесо катится по доске без проскальзывания, имеем

$$(12) \quad r\dot{\varphi}_1 = \rho\dot{\varphi}_2,$$

где r — радиус колеса.

Обозначим через φ_1 угол, который плоскость регулятора образует с координатной плоскостью Oyz . Тогда для координат точек

$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и $N(x_3, 0, 0)$ имеем

$$(13) \quad \begin{aligned} x_1 &= l \cos \varphi, & y_1 &= -l \sin \varphi \cos \varphi_1, & z_1 &= l \sin \varphi \sin \varphi_1; \\ x_2 &= l \cos \varphi, & y_2 &= l \sin \varphi \cos \varphi_1, & z_2 &= -l \sin \varphi \sin \varphi_1; \\ x_3 &= 2l \cos \varphi, & y_3 &= z_3 = 0. \end{aligned}$$

Параметрами системы являются величины φ_1 , φ_2 и φ , причем угол φ_2 зависит от угла φ_1 . Массой стержней OP_1 , OP_2 , P_1N и P_2N будем пренебрегать. Тогда в соответствии с выражениями (13), кинетическая энергия регулятора будет равна

$$T_P = l^2(m_1 + 2m_2 \sin^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 + m_1 l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}_1^2.$$

Следовательно, кинетическая энергия системы принимает вид

$$(14) \quad T = l^2(m_1 + 2m_2 \sin^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 + m_1 l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

где J_1 — сумма моментов инерции муфты N и колеса K , а J_2 — момент инерции диска.

Элементарная работа внешних сил дается выражением

$$(15) \quad \delta A = m_1 g \delta x_1 + m_1 g \delta x_2 + m_2 g \delta x_3 + M(t) \delta \varphi_1,$$

где $M(t)$ — момент внешних сил, вращающих ось регулятора. Учитывая (13), из (15) получим

$$(16) \quad Q_\varphi = -2lg(m_1 + m_2) \sin \varphi,$$

$$Q_{\varphi_1} = M(t), \quad Q_{\varphi_2} = 0.$$

Таким образом, уравнения движения системы (6), в рассматриваемом случае, принимают вид

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) \frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\varphi}_1} = Q_{\varphi_1}.$$

Согласно (14) и (16) первое уравнение (17) принимает вид

$$(18) \quad \frac{d}{dt} [2l^2(m_1 + 2m_2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}] - 4m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi =$$

$$= 2m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2lg(m_1 + m_2) \sin \varphi.$$

Уравнение (18) допускает частное решение

$$(19) \quad \varphi = \text{const}, \quad \cos \varphi = \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 l \dot{\varphi}_1^2},$$

которое является положением равновесия регулятора.

Прежде чем рассмотреть второе уравнение (17), перейдем к исследованию неголономной связи (12). Так как

$$(20) \quad 2l \cos \varphi + NK + \rho = OO_1,$$

то обозначая чрез $L = OO_1 - NK = \text{const}$, из соотношения (20) имеем

$$(21) \quad \rho(t) = L - 2l \cos \varphi.$$

На основе (19) из (21) получим

$$\rho(t) = L - \frac{2g(m_1 + m_2)}{m_1 \dot{\varphi}_1^2},$$

откуда (12) преобразуется в виде

$$r \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \left[L - \frac{2g(m_1 + m_2)}{m_1 \dot{\varphi}_1^2} \right].$$

Отсюда находим

$$(22) \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{m_1 r \dot{\varphi}_1^3}{L m_1 \dot{\varphi}_1^2 - 2g(m_1 + m_2)},$$

т. е. связь между угловыми скоростями нелинейная. Используя (14), (16) и (22), второе уравнение (17) принимает вид

$$(23) \quad \frac{d}{dt} [J_1 \dot{\varphi}_1 + 2m_1 l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}_1] + J_2 \ddot{\varphi}_2 \frac{L m_1 \dot{\varphi}_1^4 - 6g(m_1 + m_2) \dot{\varphi}_1^2}{[L m_1 \dot{\varphi}_1^2 - 2g(m_1 + m_2)]^2} = M(t).$$

Подставляя (22) в (23), получим

$$\frac{d}{dt} [J_1 \dot{\varphi}_1 + 2m_1 l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}_1] + J_2 \ddot{\varphi}_2 \frac{[L m_1 \dot{\varphi}_1^4 - 6g(m_1 + m_2) \dot{\varphi}_1^2]^2}{[L m_1 \dot{\varphi}_1^2 - 2g(m_1 + m_2)]^4} = M(t).$$

Это уравнение можно привести к квадратурам относительно φ_1 .

В частном случае, когда $\dot{\varphi}_1 = \omega = \text{const}$ решение задачи $\varphi = \text{const}$, определенное из (19). В этом случае $\rho = \text{const}$, $\dot{\varphi}_2 = \text{const}$. Тогда из (23) $M(t) = 0$, т. е. вращающий внешний момент регулятора равняется нулю. Этот случай возможен когда момент внешних сил уравновешивается с моментом сил трения при вращении регулятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николенко, И. В. Динамика управляемых неавтономных систем. Киев, 1985.
2. Апель, П. Теоретическая механика, т. 1, 1960.
3. Новоселов, В. С. Ученые записки ЛГУ, 217, вып. 31, 1957.
4. Новоселов, В. С. Ученые записки ЛГУ, 280, вып. 35, 1960.
5. Добронравов, В. В. Основы механики неавтономных систем, М., 1970.
6. Летов, А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем, 1962.
7. Маслов, Ю. Н. Научные труды Ташкентского государственного университета, 242, 1969.

Поступила 12.03.1991