

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mecanique

Tome 84, 1990

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ТЕЛ, СВЯЗАННЫХ СТРУНАМИ

НИКОЛИНА ВАСИЛЕВА, ЛЮБОМИР ЛИЛОВ

Николина Василева, Любомир Лилев. СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, СВЯЗАННЫХ СТРУНАМИ

На основе общих уравнений движения голономной системы в инвариантной тензорной форме, выведенных ранее авторами [5], найдены стационарные движения системы абсолютно твердых осесимметрических тел (гироскопов Лагранжа), которые связаны между собой абсолютно гибкими нерастяжимыми струнами.

Nikolina Vasileva, Ljubomir Lilov. STEADY-STATE MOTIONS FOR SYSTEMS OF RIGID BODIES CONNECTED WITH STRINGS

Steady-state motions for systems of rigid bodies with dynamical axes of symmetry (Lagrange's gyroscopes) interconnected by means of absolutely flexible strings are found through the use of general equations of motion, derived by the authors in [5] in an invariant tensor form.

Известно, что в технике часто возникает необходимость теоретического и экспериментального исследования движения твердых тел, связанных между собой струнами. Так, например, метод динамической балансировки тел использует обстоятельство, что тело произвольной формы, подвешанное на струне, может совершать стационарное движение, при котором одна из его главных центральных осей инерции совпадает с вертикалью. Исследование стационарных движений одного тела, подвешанного на струне и их устойчивости является предметом работ [1, 2, 3], в которых приведены примеры различных форм стационарных движений и дается описание проведенных экспериментов. Рассматриваются как осе-

симметрические, так и произвольные абсолютно твердые тела. Использование традиционного математического аппарата аналитической механики для более сложных систем приводит к огромному объему вычислительной работы. Это является следствием того, что в качестве обобщенных координат системы выбираются скалярные величины, которые не имеют конкретный механический смысл. Ряд промежуточных вычислений можно исключить, если использовать тензорную форму уравнений движения. Таким образом, упрощается запись уравнений и избегается зависимость решения поставленной задачи от выбора обобщенных координат. Использование естественных геометрических характеристик рассматриваемых систем в качестве параметров движения делает прозрачным их механическое поведение.

Цель настоящей работы — вывод уравнений движения произвольной системы тел со структурой дерева в инвариантной тензорной форме. Полученные уравнения используются для определения стационарных движений системы осесимметрических тел, которые связаны между собой абсолютно гибкими нерастяжимыми и натянутыми струнами.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ ДЕРЕВА

Рассмотрим голономную систему $n + 1$ абсолютно твердых тел, которая имеет структуру дерева. Допустим, что движение одного из тел, которому присваиваем номер 0, задается как функция времени. Без ограничения общности можно считать, что с телом (0) связано только одно из тел системы, так как в противном случае систему можно разбить на части, которые являются независимыми между собой. Допустим также, что кинематические связи, осуществленные в сочленениях (шарнирах) тел, являются идеальными, т. е. силы реакции не совершают работы на виртуальных перемещениях системы.

Для описания структуры взаимосвязей между телами и сочленениями воспользуемся основными определениями и обозначениями в книге Виттенбурга [4].

Данной системе тел сопоставляем ориентированный граф, в котором дуги u_a ($a = 1, \dots, n$) соответствуют сочленениям, а вершины s_i ($i = 1, \dots, n$) — телам системы. Каждая дуга u_a соединяет в точности две вершины графа. Будем говорить также, что дуга u_a инцидентна этим вершинам. Ориентацию дуги u_a определяем в зависимости от вида соответствующего ей сочленения в системе тел. Обычно при описании относительного движения в любом сочленении u_a одно из тел является основным, а движение другого рассматривается относительно его. Тогда ориентацию дуги u_a выбираем с направлением из вершины, соответствующей основному телу к другой вершине, инцидентной этой дуге.

Пусть s_i и s_j две вершины графа. Перейдем из s_i в s_j вдоль последовательности вершин и дуг (не принимая во внимания направление)

по такому пути, чтобы ни одна дуга не проходила более одного раза. Тогда неупорядочное множество, определенных таким образом дуг, называется путем между s_i и s_j . В графе со структурой дерева путь между s_i и s_j определяется единственным образом. Говорят, что вершина s_k лежит на пути между s_i и s_j , если хотя бы одна дуга, принадлежащая этому пути, инцидентна s_k . Введем обозначения $s_i \leq s_j$ ($s_j \geq s_i$), если вершина s_i лежит на пути между s_0 и s_j и $s_i < s_j$ ($s_j > s_i$), если вершина s_i лежит на пути между s_0 и s_j и не совпадает с s_j . Отношение $s_j \not\leq s_i$ есть отрицание $s_j \geq s_i$.

Дуга u_a называется предшествующей вершине s_i , если u_a принадлежит пути между s_0 и s_i и является инцидентной вершине s_i . Всегда можно нумерировать дуги и вершины графа таким образом, чтобы каждая вершина и предшествующая ей дуга имели один и тот же номер (регулярная нумерация). Для ориентированного графа рассматриваемой системы предполагаем регулярную нумерацию.

Обозначая через $i^+(a)$ начало дуги u_a и через $i^-(a)$ — ее конец, определяем матрицу инцидентности $(\underline{S}_0^T, \underline{S}^T)^T$, где

$$\underline{S}_0 = (S_{01}, \dots, S_{0n}), \quad \underline{S} = (S_{ia})_{i,a=1}^n,$$

$$S_{ia} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i^+(a) \\ -1, & \text{если } i = i^-(a) \\ 0 & \text{в остальных случаях } (i = 0, \dots, n; a = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Так как нумерация графа — регулярная, матрица \underline{S} и ее обратная $\underline{S}^{-1} = \underline{T}$ являются верхними треугольными матрицами. Элементы T_{ai} матрицы \underline{T} тоже принимают значения 1, -1, и 0, а именно: $T_{ai} = 1$, если дуга u_a находится на пути от вершины s_0 к вершине s_i и направлена к s_0 , $T_{ai} = -1$, если направление дуги u_a — к s_i и $T_{ai} = 0$, если дуга u_a не принадлежит пути от s_0 к s_i .

Чтобы определить взаимное положение соседних тел в сочленении (а), выбираем фиксированные соответственно в телах $i^+(a)$ и $i^-(a)$ точки $C_{i^+(a)a}$ и $C_{i^-(a)a}$. Вектор $z_a = \overrightarrow{C_{i^+(a)a} C_{i^-(a)a}}$ называется шарнирным вектором, а точки $C_{i^+(a)a}$ и $C_{i^-(a)a}$ — шарнирными точками. Точку C_{ii} будем называть предшествующей точкой для тела (i). Введем векторы

$$(1) \quad z_{a0} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j T_{aj} z_a, \quad z_{ai} = z_{a0} - T_{ai} z_a \quad (i, a = 1, \dots, n),$$

где m_j — масса тела (j), $M = \sum_{i=1}^n m_i$.

Так как $T_{aj} \neq 0$ только для тел с номерами j, для которых $s_j \geq s_a$, при том $T_{aj} = T_{aa}$, то

$$z_{a0} = \frac{1}{M} \sum_{j: s_j \geq s_a}^n m_j T_{aj} z_a = \frac{1}{M} \left(\sum_{j: s_j \geq s_a}^n m_j \right) T_{aa} z_a,$$

$$z_{ai} = \begin{cases} z_{a0}, & \text{если } s_i \not\geq s_a \\ z_{aa} = -\frac{1}{M} \left(\sum_{j: s_j \not\geq s_a}^n m_j \right) T_{aa} z_a, & \text{если } s_i \geq s_a. \end{cases}$$

Можно проверить, что имеет место соотношение

$$\sum_{j=1}^n m_j z_{aj} = 0 \quad (a = 1, \dots, n).$$

Рассмотрим тело с номером i . Так как путь между вершиной s_i и произвольной другой вершиной s_j графа — единственный, то на теле (i) существует только одна шарнирная точка, которая ведет к телу (j). К каждой шарнирной точке тела (i) добавляем точечную массу, равную сумме масс всех тел, к которым ведет эта точка. Полученное тело массой M называется дополненным телом (i), а его центр масс — барицентр тела (i). Обозначим через C_i и B_i центр масс и барицентр тела (i). Введем векторы b_{ij} ($j = 0, \dots, n$), где b_{ij} при $i \neq j$ является вектором с началом в точке B_i и концом в шарнирной точке тела (i), которая ведет к телу (j).

В случае $i = j$ положим $b_{ii} = \overrightarrow{B_i C_i}$. Очевидно

$$\sum_{j=1}^n m_j b_{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Векторы b_{ij} и d_{ij} , определяемые равенствами

$$(2) \quad d_{ij} = b_{i0} - b_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

жестко связанные с телом (i). Отметим также, что для каждого j , выполняющего условие $s_j \not\geq s_i$, справедливы равенства

$$b_{ij} = b_{i0}, \quad d_{ij} = 0.$$

Пусть O — некоторая неподвижная в инерциальном пространстве точка и O' — единственная шарнирная точка тела (0). Так как закон движения тела (0) заданный, то изменение вектора $r_0 = \overrightarrow{OO'}$ в пространстве является известной функцией времени t .

Радиус-вектор $r_i = \overrightarrow{OC_i}$ представляется суммой [4]

$$r_i = -\sum_{j=1}^n d_{ji} - \sum_{a=1}^n T_{ai} z_a + r_0 = \sum_{j=1}^n (b_{ji} - b_{j0}) - \sum_{a=1}^n T_{ai} z_a + r_0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Если обозначить через C центр масс системы тел (за исключением тела (0)), то для радиус-вектора $r_c = \overrightarrow{OC}$ и векторов $R_i = \overrightarrow{CC_i}$ справедливы выражения

$$r_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i = -\sum_{j=1}^n b_{j0} - \sum_{a=1}^n z_{a0} + r_0 = -\sum_{j=1}^n (b_{j0} + z_{j0}) + r_0,$$

$$R_i = r_i - r_C = \sum_{j=1}^n (b_{ji} + z_{ji}) \quad (i = 1, \dots, n),$$

при этом $\sum_{i=1}^n m_i R_i = 0$.

Кинетическая энергия системы определяется формулой ([4])

$$(3) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{R}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot J_{C_i} \cdot \omega_i + \frac{1}{2} M \dot{r}_C^2,$$

ω_i и J_{C_i} — соответственно абсолютная угловая скорость тела (i) и его тензор инерции относительно C_i .

Применяя метод вывода формулы (5.56) в [4], для первой суммы в (3) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{R}_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k=1}^n m_k (\dot{b}_{jk} + \dot{z}_{jk}) \cdot (\dot{b}_{ik} + \dot{z}_{ik}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\dot{b}_{ij} + \dot{z}_{ij})^2 m_j \\ &= -\frac{1}{2} M \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} (\dot{b}_{ji} + \dot{z}_{ji}) \cdot (\dot{b}_{ij} + \dot{z}_{ij}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_j \dot{b}_{ij}^2 - M \sum_{i=1}^n \dot{b}_{i0} \cdot \dot{z}_{ii} \\ &\quad - \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^n \dot{z}_{i0} \cdot \dot{z}_{ii}. \end{aligned}$$

Принимая в виду равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{r}_C^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} (\dot{b}_{j0} + \dot{z}_{j0}) \cdot (\dot{b}_{i0} + \dot{z}_{i0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{b}_{i0}^2 + 2\dot{b}_{i0} \cdot \dot{z}_{i0} + \dot{z}_{i0}^2) \\ &\quad - \dot{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^n (\dot{b}_{i0} + \dot{z}_{i0}) + \frac{1}{2} \dot{r}_0^2, \end{aligned}$$

$$\dot{b}_{ij} = \omega_i \times b_{ij}, \quad \dot{b}_{ij}^2 = -\omega_i \cdot \tilde{b}_{ij} \cdot \tilde{b}_{ij} \cdot \omega_i,$$

$$J_i = J_C - \sum_{j=1}^n m_j \tilde{b}_{ij} \cdot \tilde{b}_{ij} - M \tilde{b}_{i0} \cdot \tilde{b}_{i0}$$

$$= J_C + \sum_{j=1}^n m_j (b_{ij}^2 E_2 - b_{ij} b_{ij}) + M (b_{i0}^2 E_2 - b_{i0} b_{i0}),$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, n$, E_2 — единичный тензор второй валентности [5], приводим выражение кинетической энергии к виду

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot J_i \cdot \omega_i + \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} [(\dot{b}_{j0} + \dot{z}_{j0}) \cdot (\dot{b}_{i0} + \dot{z}_{i0}) - (\dot{b}_{ji} + \dot{z}_{ji}) \cdot (\dot{b}_{ij} + \dot{z}_{ij})] \\ &\quad + M \sum_{i=1}^n T_{ii} \left(\dot{b}_{i0} + \frac{1}{2} \dot{z}_{i0} \right) \cdot \dot{z}_{i0} - M \dot{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^n (\dot{b}_{i0} + \dot{z}_{i0}) + \frac{1}{2} M \dot{r}_0^2. \end{aligned}$$

Тензор J_i является тензором инерции дополненного тела (i) относительно его предшествующей точки C_{ii} .

Пусть в качестве обобщенных координат системы выбраны тензоры X_1, \dots, X_m валентностей ν_1, \dots, ν_m . Согласно [5], уравнения движения записываются в виде

$$(4) \quad \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k} \cdot (J_i \cdot \omega_i) + M \frac{[1] \partial (b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (T_{ii} \ddot{z}_i - \ddot{r}_0) + T_{ii} \frac{[1] \partial z_i}{\partial X_k} \cdot M \ddot{b}_{i0} \right. \\ \left. + \sum_{j \neq i} \left[\frac{[1] \partial (b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - \frac{[1] \partial (b_{ij} + z_{ij})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{ji}) \right] \right\} = \tilde{X}_k \wedge_k Q_{\nu_k},$$

где Q_k — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате X_k . Если r — радиус-вектор произвольного элемента dm и df — действующая на dm сила, то

$$Q_k = \int_{(V)} \frac{[1] \partial r}{\partial X_k} \cdot df,$$

где интегрирование производится по полному объему (V) системы.

Так как векторы b_{ij} являются неподвижными относительно тела (i), то можно применить формулы ([5])

$$(5) \quad \frac{[1] \partial b_{ij}}{\partial X_k} = \frac{[1] \partial \dot{b}_{ij}}{\partial \dot{X}_k} = \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial \dot{X}_k} \cdot \tilde{b}_{ij} \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

Если силы, действующие на систему, являются потенциальными, то $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial X_k}$, где $\Pi = \Pi(t, X_1, \dots, X_m)$ — потенциальная энергия системы.

Уравнения (4) можно записать и в следующем виде:

$$(6) \quad \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k} \cdot (J_i \cdot \omega_i) - M \frac{[1] \partial (b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot \left[\ddot{r}_0 - T_{ii} \ddot{z}_i \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{j: s_j < s_i} (\ddot{d}_{ji} + T_{ji} \ddot{z}_j) \right] + M \sum_{j: s_j > s_i} \frac{[1] \partial (d_{ij} + T_{ij} z_i)}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) \right. \\ \left. + M T_{ii} \frac{[1] \partial z_i}{\partial X_k} \cdot \ddot{b}_{i0} \right\} = \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} Q_{\nu_k} \quad (k = 1, \dots, m).$$

Уравнения (6) следуют из преобразований

$$\sum_{j \neq i} \left[\frac{[1] \partial (b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - \frac{[1] \partial (b_{ij} + z_{ij})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{ji}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j:s_j \neq s_i} \left[\frac{[1] \partial(b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - \frac{[1] \partial(b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{ji}) \right] \\
&+ \sum_{j:s_j > s_i} \left[\frac{[1] \partial(b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - \frac{[1] \partial(b_{ij} + z_{ij})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) \right] \\
&= \sum_{j:s_j \neq s_i} \frac{[1] \partial(b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} - \ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{j0} - \ddot{z}_{ji}) \\
&+ \sum_{j:s_j > s_i} \frac{[1] \partial(b_{i0} - b_{ij} + z_{i0} - z_{ij})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}).
\end{aligned}$$

Так как в первой сумме отличными от нуля являются только слагаемые, для которых $s_j < s_i$, то имея в виду формулы (1) и (2), получаем выражение

$$\frac{[1] \partial(b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot \sum_{j:s_j < s_i} (\ddot{d}_{ji} + T_{ji} \ddot{z}_j) + \sum_{j:s_j > s_i} \frac{[1] \partial(d_{ij} + T_{ij} z_i)}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}),$$

из которого следуют уравнения (6).

Если представить радиус-вектор \mathbf{r} произвольной точки тела (i) как сумму $\mathbf{r}_{C_{ii}} + \boldsymbol{\rho}$, где $\mathbf{r}_{C_{ii}} = \overrightarrow{OC_{ii}}$, то обобщенная сила Q_k преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
Q_k &= \sum_{i=1}^n \int_{(V)} \frac{[1] \partial(\mathbf{r}_{C_{ii}} + \boldsymbol{\rho})}{\partial X_k} df = \sum_{i=1}^n \left[\frac{[1] \partial \mathbf{r}_{C_{ii}}}{\partial X_k} \int_{(V_i)} df + \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k} \int_{(V)} \tilde{\boldsymbol{\rho}} df \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{[1] \partial \mathbf{r}_{C_{ii}}}{\partial X_k} \cdot \mathbf{F}_i + \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k} \cdot \mathbf{M}_i \right],
\end{aligned}$$

где V_i — объем тела (i), а \mathbf{F}_i и \mathbf{M}_i — соответственно результирующая сила и результирующий момент относительно C_{ii} всех сил, действующих на тело (i). Используя то, что

$$(7) \quad \mathbf{r}_{C_{ii}} = \mathbf{r}_0 - \sum_{j:s_j < s_i} (d_{ji} + T_{ji} z_j) - T_{ii} z_i,$$

получаем выражение

$$\begin{aligned}
Q_k &= \sum_{i=1}^n \left[- \sum_{j:s_j < s_i} \frac{[1] \partial(d_{ji} + T_{ji} z_j)}{\partial X_k} \cdot \mathbf{F}_i - T_{ii} \frac{[1] \partial z_i}{\partial X_k} \cdot \mathbf{F}_i + \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k} \cdot \mathbf{M}_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[- \sum_{j:s_j > s_i} \frac{[1] \partial(d_{ij} + T_{ij} z_i)}{\partial X_k} \cdot \mathbf{F}_j + \frac{[1] \partial(-T_{ii} z_i)}{\partial X_k} \cdot \mathbf{F}_i + \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k} \cdot \mathbf{M}_i \right].
\end{aligned}$$

Последняя сумма получена изменением порядка суммирования с последующей перестановкой индексов. Из проделанных вычислений, применяя формулы (7) и (5), записываем уравнения движения в виде

$$(8) \quad \begin{aligned} & \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{aligned} & [1] \frac{\partial \omega_i}{\partial X_k} \cdot \left[(J_i \cdot \omega_i)' - M b_{i0} \times \ddot{r}_{C_{ii}} \right. \\ & \left. + \sum_{j:s_j > s_i} d_{ij} \times (M \ddot{b}_{j0} + M \ddot{z}_{j0} + F_j) - M_i \right] \\ & + \frac{[1] \partial(-T_{ii} z_i)}{\partial X_k} \cdot \left[\left(\sum_{j:s_j > s_i} m_j \right) \ddot{r}_{C_{ii}} - M \ddot{b}_{i0} - F_i \right. \\ & \left. \left. - \sum_{j:s_j > s_i} (M \ddot{b}_{j0} + M \ddot{z}_{j0} + F_j) \right] \right\} = \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} O_{\nu_k}, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, m$, а O_{ν_k} — нулевой тензор валентности ν_k .

Уравнения (8) имеют следующий механический смысл. Выражение $(J_i \cdot \omega_i)' - M b_{i0} \times \ddot{r}_{C_{ii}}$ является изменением кинетического момента дополненного тела (i) относительно точки C_{ii} . Если предположить, что в каждой шарнирной точке тела (i) действует сила, которая является суммой векторов $M \ddot{b}_{j0} + M \ddot{z}_{j0} + F_j$, где j — номера тех тел системы, которые связаны с телом (i) посредством этой шарнирной точки, то результирующий момент всех сил, действующих на тело (i), выражается вектором

$$-d_{ij} \times \sum_{j:s_j > s_i} (M \ddot{b}_{j0} + M \ddot{z}_{j0} + F_j) + M_i$$

и равенство

$$(9) \quad K_i = (J_i \cdot \omega_i)' - M b_{i0} \times \ddot{r}_{C_{ii}} - \left[-d_{ij} \times \sum_{j:s_j > s_i} (M \ddot{b}_{j0} + M \ddot{z}_{j0} + F_j) \right] - M_i = 0$$

выражает теорему о кинетическом моменте (рис. 1а).

Для шарнирного вектора $z_i = \overrightarrow{C_{i+(i)i} C_{i-(i)i}}$ независимо от выбора направления дуги u_i графа системы, вектор $-T_{ii} z_i$ направлен от тела (0) к телу (i), т. е. его начальная точка G_i находится на теле, предшествующем телу (i), а его концом всегда является точка C_{ii} (рис. 1б). Полагая, что точки G_i и C_{ii} имеют массы $\sum_{j:s_j \neq s_i} m_j$ и $\sum_{j:s_j \geq s_i} m_j$ соответственно и что

на точку C_{ii} действует сила

$$M \ddot{b}_{i0} + F_i + \sum_{j:s_j > s_i} (M \ddot{b}_{j0} + M \ddot{z}_{j0} + F_j),$$

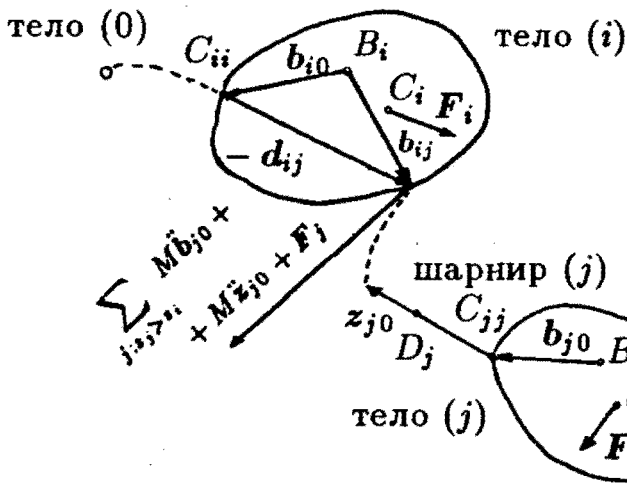


Рис. 1а

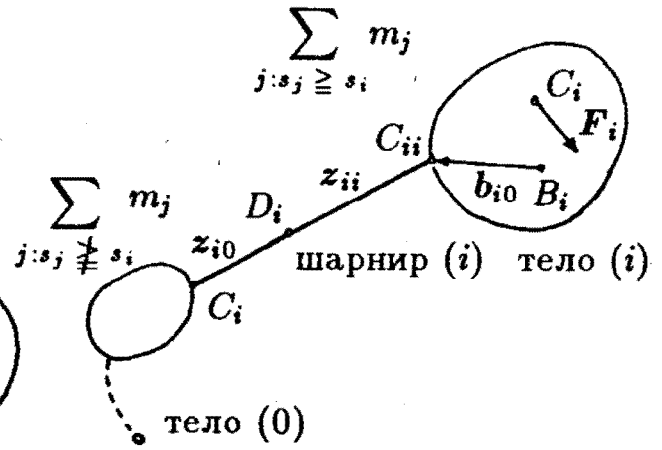


Рис. 1б

то абсолютное движение точки C_{ii} определяется уравнением (рис. 1б)

$$L_i = \left(\sum_{j:s_j \geq s_i} m_j \right) \ddot{r}_{C_{ii}} - \left[M\ddot{b}_{i0} + F_i + \sum_{j:s_j > s_i} (M\ddot{b}_{j0} + M\ddot{z}_{j0} + F_j) \right] = 0.$$

Если обозначить через D_j центр масс системы из двух точек G_j и C_{jj} , то $\overline{D_j G_j} = z_{j0}$, $\overline{D_j C_{jj}} = z_{jj}$, и вектор $M\ddot{z}_{j0}$ можно рассматривать как силу, с которой стержень массы M с центром масс D_j и ускорением \ddot{z}_{j0} действует на свою опорную точку G_i (рис. 1б). Подобным образом вектор $M\ddot{b}_{j0} + F_j$ в равенстве (9) является силой, с которой дополненное тело (j) с центром масс B_j при его движении вокруг неподвижной точки C_{jj} действует на эту точку, в предположении, что дополненное тело (j) находится под воздействием силы F_j .

В уравнениях (8) производные $\frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k}$ и $\frac{[1] \partial (-T_{ii} z_i)}{\partial X_k}$ отражают влияние векторов K_i и L_i на уравнения движения. Например, если шарнирный вектор z_i не зависит от координаты X_k , то

$$\frac{[1] \partial (-T_{ii} z_i)}{\partial X_k} \cdot L_i = 0,$$

если $X_i = \theta$ — угол вращения тела (i) относительно некоторой неподвижной оси ξ , то

$$\frac{[1] \partial \omega_i}{\partial \theta_k} = \xi, \quad \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial \theta_k} \cdot K_i = \xi \cdot K_i.$$

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, СВЯЗАННЫЕ МЕЖДУ СОБОЙ ИДЕАЛЬНЫМИ СТРУНАМИ

Рассмотрим систему тел, для которой выполнены следующие условия: система находится под действием силы тяжести, тело (0) — неподвижное ($\mathbf{r}_0(t) \equiv 0$), тела системы имеют динамические оси симметрии и связаны между собой в концах своих осей симметрии абсолютно нерастяжимыми, лишенными массой струнами, которые остаются натянутыми во время движения. При наличии таких сочленений удобно рассматривать движение каждого тела относительно его предшествующего тела и, таким образом, $i^-(i) = i$. Отсюда следует также, что все различные от нуля элементы матрицы \underline{T} равняются -1 .

В качестве шарнирных точек, определяющих вектор \mathbf{z}_i , выбираем концы осей симметрии соседних тел, связанных посредством шарнира (i), а в качестве координатного вектора $\mathbf{e}_3^{(i)}$, неизменно связанного с телом (i) базиса $\underline{e}^{(i)} = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)})^T$ — единичный вектор его оси симметрии с направлением от точки $P_i = C_{ii}$ к центру масс C_i . Инерциальную координатную систему, для которой предполагаем, что вектор $\mathbf{e}_3^{(0)}$ имеет противоположное силе тяжести направление, обозначаем через $Oe_1^{(0)}e_2^{(0)}e_3^{(0)}$.

Положение тела (i) по отношению к предшествующему телу очевидно определяется пятью скалярными параметрами. Это положение можно определить единичным вектором $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{z}_i}{|\mathbf{z}_i|}$ и ортонормированным тензором Γ_i , которым задается абсолютное движение базиса $\underline{e}^{(i)}$. Величины $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ принимаем за обобщенные координаты рассматриваемой системы.

Легко увидеть, что от переменной \mathbf{u}_i зависят только векторы $\mathbf{z}_{i0}, \dots, \mathbf{z}_{in}$, а от переменной Γ_i — векторы $\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{b}_{i0}, \dots, \mathbf{b}_{in}$ и тензор \mathbf{J}_i , при том (так как $|\mathbf{z}_{ij}| = \text{const}$)

$$(10) \quad \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \frac{[1] \partial \mathbf{z}_{ij}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i} = |\mathbf{z}_{ij}| \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{E}_2 = \tilde{z}_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}_i \cdot \frac{[1] \partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \tilde{\Gamma}_i} = \mathbf{E}_2$$

($i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, n$). С учетом формул (10) и, принимая во внимание, что потенциальная энергия системы выражается формулой

$$\Pi = Mgr_C \cdot e_3^{(0)} = -Mg \sum_{j=1}^n (\mathbf{b}_{j0} + \mathbf{z}_{j0}) \cdot e_3^{(0)},$$

для уравнений движения (4) находим

$$(11) \quad \left[\mathbf{J}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right]' + M \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{b}_{i0} \times (\ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \ddot{\mathbf{z}}_{j0}) - \mathbf{b}_{ij} \times (\ddot{\mathbf{b}}_{ji} + \ddot{\mathbf{z}}_{ji}) \right] - M \mathbf{b}_{i0} \times \ddot{\mathbf{z}}_i - Mg \mathbf{b}_{i0} \times e_3^{(0)} = 0,$$

$$M \sum_{j \neq i} \left[z_{i0} \times (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - z_{ij} \times (\ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{ji}) \right] - M z_{i0} \times \ddot{z}_i - M z_i \times \ddot{b}_{i0} - M g z_{i0} \times e_3^{(0)} = 0,$$

где $i = 1, \dots, n$.

Число эквивалентных уравнениям (11) скалярных уравнений равняется $3n + 2n = 5n$, что совпадает с числом степеней свободы системы.

Для каждого тела (j) длина l_j оси симметрии и величины

$$c_j = |C_j P_j|, \quad \mu_j = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n T_{ji} m_i = \frac{1}{M} \sum_{i: s_i \geq s_j} m_i,$$

$$b_j = \frac{1}{M} \left[(c_j - l_j) m_j - l_j \sum_{i=1}^n T_{ji} m_i \right] = \frac{1}{M} (c_j - l_j) m_j + l_j \mu_j$$

являются постоянными. С их помощью векторы b_{j0} и b_{ji} выражаются формулами

$$(12) \quad b_{j0} = -b_j e_3^{(j)}, \quad b_{ji} = -(T_{ji} l_j + b_j) e_3^{(j)} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Векторы z_j , z_{j0} и z_{ji} представляем в виде

$$(13) \quad \begin{aligned} z_j &= p_j u_j, \quad p_j = \text{const}; \quad z_{j0} = -d_j u_j, \quad d_j = \mu_j p_j; \\ z_{ij} &= -(T_{ji} p_j + d_j) u_j \quad (i, j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Используя равенство $T_{ij} T_{ji} = 0$ и обозначая

$$(14) \quad \begin{aligned} g_{ij} &= -M(T_{ij} l_i b_j + T_{ji} l_j b_i) = g_{ji}, \\ \nu_{ij} &= -M(T_{ij} p_i d_j + T_{ji} p_j d_i) = \nu_{ji}, \\ \lambda_{ij} &= -M(T_{ij} l_i d_j + T_{ji} p_j b_i), \\ \lambda_{ii} &= M b_i p_i, \quad \nu_{ii} = M p_{ii} d_i, \end{aligned}$$

с учетом формул (12) и (13) получаем

$$(J_i \cdot \omega_i) + \sum_{j \neq i} g_{ij} e_3^{(i)} \times \ddot{e}_3^{(j)} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_3^{(i)} \times \ddot{u}_j + M g b_i e_3^{(i)} \times e_3^{(0)} = 0,$$

$$u_i \times \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \ddot{e}_3^{(j)} + \sum_{j=1}^n \nu_{ij} \ddot{u}_j + M g d_i e_3^{(0)} \right] = 0.$$

Используя обстоятельство, что тела системы — осесимметрические, можно представить уравнения движения в виде

$$(J_i \cdot \omega_i) \cdot e_3^{(i)} = a_i,$$

$$(15) \quad e_3^{(i)} \times \left[(\tilde{e}_3^{(i)} \cdot J_i) \cdot \dot{\omega}_i + (a_i E_2 - \omega_i \cdot e_3^{(i)} J_i) \cdot \omega_i + \sum_{j \neq i} g_{ij} \ddot{e}_3^{(i)} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \times \ddot{u}_j \right] + M g b_i e_3^{(i)} \times e_3^{(0)} = 0,$$

$$(16) \quad u_i \times \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \ddot{e}_3^{(j)} + \sum_{j=1}^n \nu_{ji} \ddot{u}_j + M g d_i e_3^{(0)} \right] = 0,$$

где a_1, \dots, a_n — произвольные скалярные величины.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Угловое положение базиса $\underline{e}^{(i)}$ по отношению к инерциальному базису $\underline{e}^{(0)}$ можно определить, как известно, тремя скалярными параметрами. В качестве таких параметров выбирают углы трех последовательных поворотов, переводящих базис $\underline{e}^{(0)}$ в базис $\underline{e}^{(i)}$. При этом обычно последний поворот имеет ось вращения $e_3^{(i)}$. Обозначая угол вращения вокруг $e_3^{(i)}$ через φ_i , можно записать, что абсолютная угловая скорость ω_i выражается формулой $\omega_i = \Omega_i + \dot{\varphi}_i e_3^{(i)}$, где как показано в [6], произведение $\Omega_i \cdot e_3^{(i)}$ не зависит от угла φ_i . Тогда из соотношений $(J_i \cdot \omega_i) \cdot e_3^{(i)} = J_3^{(i)} (\Omega_i \cdot e_3^{(i)} + \dot{\varphi}_i) = a_i$, где $J_3^{(i)}$ — главный момент инерции дополненного тела (i) относительно $e_3^{(i)}$, можно определить величины φ_i ($i = 1, \dots, n$). Следовательно, координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются циклическими. Известно, что в таком случае система может совершать стационарные движения, в которых явно входящие в уравнения координаты (позиционные) и скорости циклических координат сохраняют свои начальные значения.

Для рассматриваемой системы стационарными являются те движения, при которых остов системы, составленный из осей тел и соединяющих их струн, остается неподвижным относительно базиса, вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi} e_3^{(0)}$, $\dot{\psi} = \text{const}$, а тела вращаются равномерно вокруг своих осей симметрии. Таким образом, абсолютная угловая скорость тела (i) выражается равенством

$$\omega_i = \dot{\psi} e_3^{(0)} + \dot{\varphi}_i e_3^{(i)}.$$

Для производных векторов $e_3^{(i)}$ и u_i имеем

$$\begin{aligned} \dot{e}_3^{(i)} &= \dot{\psi} e_3^{(0)} \times e_3^{(i)}, & \ddot{e}_3^{(i)} &= \dot{\psi}^2 e_3^{(0)} \times (e_3^{(0)} \times e_3^{(i)}), \\ \dot{u}_i &= \dot{\psi} e_3^{(0)} \times u_i, & \ddot{u}_i &= \dot{\psi}^2 e_3^{(0)} \times (e_3^{(0)} \times u_i) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются производные векторов

$$s_i = \sum_{j \neq i} g_{ij} e_3^{(i)} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \times u_j,$$

$$(17) \quad \mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \mathbf{e}_3^{(i)} + \sum_{j=1}^n \nu_{ji} \mathbf{u}_j.$$

После несложных преобразований находим из (15) и (16), что уравнения движения записываются в виде

$$(18) \quad (\dot{\psi} \mathbf{e}_3^{(0)} + \dot{\varphi}_i \mathbf{e}_3^{(i)}) \cdot \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(i)} = a_i,$$

$$\mathbf{e}_3^{(i)} \times \left[\dot{\psi} (-a_i \mathbf{E}_2 + \dot{\psi} (\mathbf{e}_3^{(i)} \cdot \mathbf{e}_3^{(0)}) \mathbf{J}_i) \mathbf{e}_3^{(0)} + \dot{\psi}^2 \mathbf{e}_3^{(0)} \times (\mathbf{e}_3^{(0)} \times \mathbf{s}_i) + M g b_i \mathbf{e}_3^{(0)} \right] = 0,$$

$$\mathbf{u}_i \times \left[\dot{\psi}^2 \mathbf{e}_3^{(0)} \times (\mathbf{e}_3^{(0)} \times \mathbf{t}_i) + M g d_i \mathbf{e}_3^{(0)} \right] = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Используя координатное представление тензора \mathbf{J}_i в базисе $\underline{\mathbf{e}}^{(i)}$

$$\mathbf{J}_i = \underline{\mathbf{e}}^{(i)\text{T}} \begin{pmatrix} J_1^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & J_1^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & J_3^{(i)} \end{pmatrix} \underline{\mathbf{e}}^{(i)},$$

где $J_1^{(i)}$ и $J_3^{(i)}$ — главные моменты инерции дополненного тела (i) относительно его предшествующей точки P_i , записываем первые два уравнения в (18) в виде

$$(19) \quad J_3^{(i)} (\dot{\psi} \mathbf{e}_3^{(0)} \cdot \mathbf{e}_3^{(i)} + \dot{\varphi}_i) = a_i,$$

$$\mathbf{e}_3^{(i)} \times (x_i \mathbf{e}_3^{(0)} - \dot{\psi}^2 \mathbf{s}_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

где постоянные x_1, \dots, x_n определяются равенствами

$$(20) \quad x_i = -a_i \dot{\psi} + \dot{\psi}^2 \mathbf{e}_3^{(0)} \cdot (J_1^{(i)} \mathbf{e}_3^{(i)} + \mathbf{s}_i) + M g b_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Таким образом, так как a_1, \dots, a_n — произвольные, задача нахождения стационарных движений сводится к определению единичных векторов $\mathbf{e}_3^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_3^{(n)}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ и постоянных x_1, \dots, x_n , удовлетворяющих уравнениям

$$(21) \quad \mathbf{e}_3^{(i)} \times (x_i \mathbf{e}_3^{(0)} - \dot{\psi}^2 \mathbf{s}_i) = 0,$$

$$(22) \quad \mathbf{u}_i \times \left[\dot{\psi}^2 \mathbf{e}_3^{(0)} \times (\mathbf{e}_3^{(0)} \times \mathbf{t}_i) + M g d_i \mathbf{e}_3^{(0)} \right] = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

После нахождения этих величин, угловые скорости $\dot{\varphi}_i$ определяются из равенств (19) и (20).

Очевидно, если в каждый момент времени векторы $\mathbf{e}_3^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_3^{(n)}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ и $\mathbf{e}_3^{(0)}$ остаются компланарными, то $\mathbf{e}_3^{(i)} \times \mathbf{e}_3^{(0)}$ и $\mathbf{e}_3^{(i)} \times \mathbf{s}_i$ являются коллинеарными и постоянные x_1, \dots, x_n можно найти из равенств (21). Следовательно, достаточно определить такие единичные векторы $\mathbf{e}_3^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_3^{(n)}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, которые лежат в одной вертикальной плоскости и удовлетворяют равенствам (22). С этой целью выбираем произвольные компланарные с вектором $\mathbf{e}_3^{(0)}$ единичные векторы $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, для которых

$u_i \cdot e_3^{(0)} \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Из равенств (22) следует, что векторы t_1, \dots, t_n должны удовлетворять условиям

$$e_3^{(0)} \times \left[e_3^{(0)} \times \left(\dot{\psi}^2 t_i + \frac{Mgd_i}{u_i \cdot e_3^{(0)}} u_i \right) \right] = 0,$$

т. е.

$$\dot{\psi}^2 t_i + \frac{Mgd_i}{u_i \cdot e_3^{(0)}} u_i = My_i p_i e_3^{(0)} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Здесь y_1, \dots, y_n — постоянные. Выражая векторы t_i по формулам (17) и (14), получаем систему

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^n (T_{ji} \mu_i l_j + T_{ij} b_j) e_3^{(j)} + \mu_i l_i e_3^{(i)} - \sum_{j=1}^n (T_{ji} \mu_i p_j + T_{ij} d_j) u_j + p_i \mu_i u_i \\ + \frac{g \mu_i}{\dot{\psi}^2 (u_i \cdot e_3^{(0)})} u_i = y_i e_3^{(0)} \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

которая по отношению к величинам $e_3^{(1)}, \dots, e_3^{(n)}$ является линейной. Введем n -мерные матрицы-столбцы $\underline{\mu}$, \underline{b} , \underline{d} , \underline{p} , \underline{y} , \underline{e} , \underline{u} и $\underline{\beta}$ соответственно с элементами μ_i , b_i , d_i , p_i , y_i , $e_3^{(i)}$, u_i и $\beta_i = \frac{g \mu_i}{\dot{\psi}^2 (u_i \cdot e_3^{(0)})}$ ($i = 1, \dots, n$). С их помощью получаем матричное уравнение

$$\begin{aligned} [-\text{diag } \underline{\mu} (\underline{T}^T + \underline{E}) \text{diag } \underline{l} - \underline{T} \text{diag } \underline{b}] \underline{e} + [-\text{diag } \underline{\mu} (\underline{T}^T + \underline{E}) \text{diag } \underline{p} - \underline{T} \text{diag } \underline{d}] \underline{u} \\ + \text{diag } \underline{\beta} \underline{u} = \underline{y} e^{(0)}, \end{aligned}$$

которое умножением слева на матрицу $-\underline{S} = -\underline{T}^{-1}$ приводим в треугольный вид. Действительно, матрица

$$\underline{A} = -\underline{S} [-\text{diag } \underline{\mu} (\underline{T}^T + \underline{E}) \text{diag } \underline{l} - \underline{T} \text{diag } \underline{b}]$$

имеет элементы A_{ij} , которые выражаются равенствами

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n S_{ik} T_{jk} \mu_k l_j + S_{ij} \mu_j l_j + \delta_{ij} b_j = -S_{ij} \mu_j l_j - \sum_{k:s_k > s_j} S_{ik} \mu_k l_j + S_{ij} \mu_j l_j + \delta_{ij} b_j,$$

где δ_{ij} — символы Кронекера. Элементы S_{ik} матрицы \underline{S} — ненулевые только в случаях $i = i^-(k)$, когда $S_{ik} = S_{ii} = -1$ и $i = i^+(k)$, когда $S_{ik} = 1$. Если через U_i обозначим множество номеров тех струн, для которых тело (i) является предшествующим, т. е. $U_i = \{k : i = i^+(k)\}$, то

$$-\sum_{k:s_k > s_j} S_{ik} \mu_k l_j = \begin{cases} \left(\sum_{k \in U_i} \mu_k \right) l_i, & \text{если } s_i = s_j \\ \mu_i l_j - \left(\sum_{k \in U_i} \mu_k \right) l_j, & \text{если } s_i > s_j \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Используя, что

$$\mu_i = \frac{m_i}{M} + \sum_{k \in U_i} \mu_k, \quad b_i = \frac{1}{M}(c_j - l_j)m_j + l_j \mu_j,$$

находим

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{m_i c_i}{M}, & \text{если } i = j \\ \frac{m_i l_j}{M}, & \text{если } s_i > s_j \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е. $A_{ij} = -T_{ji} \frac{m_i l_j}{M}$ при $i \neq j$, $A_{ii} = \frac{m_i c_i}{M}$.

Подобным образом вычисляем элементы $B_{ij} = -T_{ji} \frac{m_i p_j}{M}$ матрицы $\underline{B} = -\underline{S} \left[-\text{diag } \underline{\mu} (\underline{T}^T + \underline{E}) \text{diag } \underline{p} - \underline{T} \text{diag } \underline{d} \right]$, откуда получаем систему

$$(23) \quad \frac{m_i c_i}{M} e_3^{(i)} + \frac{m_i}{M} \left[-\sum_{j \neq i} T_{ji} (l_j e_3^{(j)} + p_j u_j) + p_i u_i \right] - \sum_{j=1}^n S_{ij} \beta_j u_j = \frac{m_i y_i'}{M} e_3^{(0)}.$$

Выражение в квадратных скобках является радиус-вектором r_{P_i} предшествующей шарнирной точки P_i , а величины $y_i' = -\frac{M}{m_i} \sum_{j=1}^n S_{ij} y_j$ — произвольные. Вектор

$$h_i = -\frac{M}{m_i} \sum_{j=1}^n S_{ij} \beta_j u_j = \frac{gM}{\psi^2 m_i} \left[\frac{\mu_i}{u_i \cdot e_3^{(0)}} u_i - \sum_{j \in U_i} \frac{\mu_j}{u_j \cdot e_3^{(0)}} u_j \right]$$

является функцией тех из единичных векторов u_1, \dots, u_n , которые определяют прилежащие к телу (i) шарнирные векторы. Пусть $(e_2, e_3^{(0)})$ — ортонормированный базис плоскости, в которой расположены векторы u_1, \dots, u_n . Пусть α_i — угол между векторами $e_3^{(0)}$ и u_i с положительным направлением отсчета, определяемое вектором $e_1 = e_2 \times e_3^{(0)}$. Векторы u_i и h_i имеют представление

$$u_i = -\cos \alpha_i e_3^{(0)} + \sin \alpha_i e_2,$$

$$(24) \quad h_i = \frac{g}{\psi^2} e_3^{(0)} - \frac{gM}{\psi^2 m_i} \left[\mu_i \text{tg } \alpha_i - \sum_{j \in U_i} \mu_j \text{tg } \alpha_j \right] e_2.$$

Наконец, постоянные y_i' нужно определить таким образом, чтобы удовлетворяющие уравнениям

$$(25) \quad c_i e_3^{(i)} + r_{P_i} + h_i = y_i' e_3^{(0)}$$

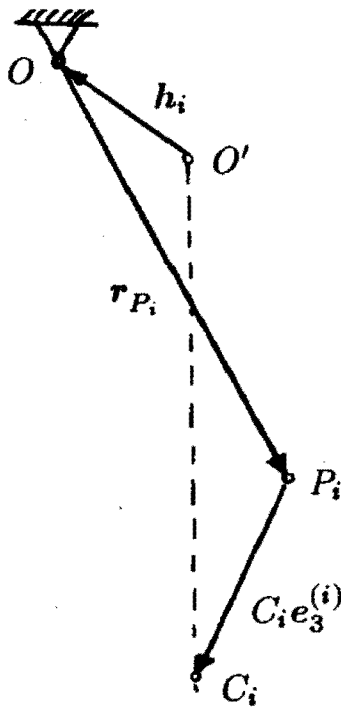


Рис. 2

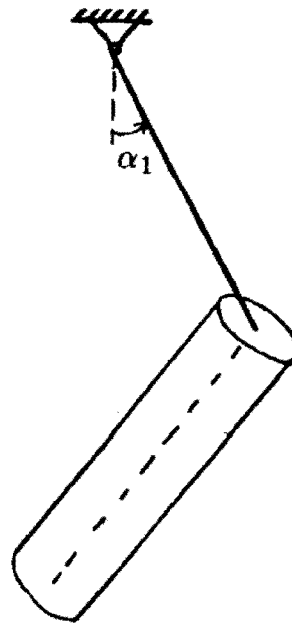


Рис. 3

векторы $e_3^{(1)}, \dots, e_3^{(n)}$ были единичными. Из условий существования реальных решений уравнений

$$(26) \quad |e_3^{(i)}|^2 = \frac{1}{c_i^2} \left[y_i'^2 - 2e_3^{(0)} \cdot (r_{P_i} + h_i) y_i' + (r_{P_i} + h_i)^2 \right] = 1$$

получаем неравенства $|(r_{P_i} + h_i) \cdot e_2| \leq c_i$, которые при помощи (24) записываем в виде

$$(27) \quad \frac{gM\mu_i}{\psi^2 m_i} \operatorname{tg} \alpha_i - (r_{P_i} \cdot e_2) - c_i \leq \frac{gM}{\psi^2 m_i} \sum_{j \in U_i} \mu_j \operatorname{tg} \alpha_j \leq \frac{gM\mu_i}{\psi^2 m_i} \operatorname{tg} \alpha_i - (r_{P_i} \cdot e_2) + c_i.$$

По отношению к величинам $\operatorname{tg} \alpha_j$, $j \in U_i$, эти неравенства являются линейными и при заданных α_i , r_{P_i} и c_i всегда имеют решения.

Для каждого крайнего тела (l) системы, т. е. тело, которое имеет только одну шарнирную точку, множество U_l — пустое. Тогда неравенство (27) имеет вид

$$(28) \quad \left| \frac{gM\mu_l}{\psi^2 m_l} \operatorname{tg} \alpha_l - (r_{P_l} \cdot e_2) \right| \leq c_l$$

и его нужно рассматривать вместе с неравенствами вида (25), которые относятся к предшествующему (l) телу. Так как в выражении для вектора r_{P_l} входит слагаемое $p_l u_l$, то в произведении $r_{P_l} \cdot e_2$ содержится слагаемое $p_l u_l \cdot e_2 = p_l \sin \alpha_l$ и, таким образом, неравенство (28) не является линейным относительно $\operatorname{tg} \alpha_l$.

Уравнения (25) и неравенства (27) имеют простую геометрическую интерпретацию. Уравнение (25) выражает условие коллинеарности вектора $\overrightarrow{O'C_i} = h_i + r_{P_i} + c_i e_3^{(i)}$ вектору $e_3^{(0)}$, а неравенство (27) накладывает ограничение на вектор h_i , при котором возможен такой выбор величины $y_i = |\overrightarrow{O'C_i}|$, чтобы $|\overrightarrow{P_i C_i}| = c_i$ (рис. 2).

Векторы $e_3^{(1)}, \dots, e_3^{(n)}$ и ограничения для векторов u_1, \dots, u_n находим последовательно. При $i = 1$, если $n > 1$, вектор u_1 выбираем произвольно, а векторы $u_j, j \in U_i$ — таким образом, чтобы неравенства (27) выполнялись. Потом определяем y'_i из равенства (26) и $e_i^{(i)}$ — из (25) и т. д. В случае $n = 1$ вектор u_1 определяется из неравенства (28) при $l = 1$.

Отметим, что система (25) упрощается значительно, если умножим соответствующее ей матричное уравнение слева на матрицу $-\underline{S}^T = -(\underline{T}^T)^{-1}$. Тогда получаем систему

$$(29) \quad e_3^{(1)} = \frac{1}{c_1}(p_1 u_1 - h_1) + y'_1 e_3^{(0)},$$

$$e_3^{(i)} = \frac{1}{c_i} \left[(c_{i+(i)} - l_{i+(i)}) e_3^{i+(i)} - p_i u_i - h_i + h_{i+(i)} \right] + y'_i e_3^{(0)}$$

($i = 1, \dots, n$), где вектор $h_{i+(i)} - h_i$ является коллинеарным вектору e_2 , а величины y'_i определяем так, чтобы $|e_3^{(i)}| = 1$. Из последнего получаем, что углы $\alpha_j, j \in U_i$, удовлетворяют неравенству

$$(30) \quad \left| \left[(c_{i+(i)} - l_{i+(i)}) e_3^{i+(i)} - p_i u_i - h_i + h_{i+(i)} \right] \cdot e_2 \right| \leq c_i.$$

В формулах (29) и (30) векторы $e_3^{(i)}$ и $u_j, j \in U_i$, выражаются посредством векторов $e_3^{i+(i)}, u_{i+(i)}$ и $h_{i+(i)}$, т. е. тех из векторов u_1, \dots, u_n , которые определяют прилежащие к телу ($i^+(i)$) шарнирные векторы.

4. ПРИМЕРЫ

1. Пусть $n = 1$ (рис. 3). Вычисляя постоянные величины для рассматриваемой системы, получаем

$$b_1 = c_1, \quad d_1 = p_1, \quad \lambda_{11} = m_1 c_1 p_1, \quad \nu_{11} = m_1 p_1^2,$$

$$s_1 = m_1 c_1 p_1 u_1, \quad t_1 = m_1 c_1 p_1 e_3^{(1)} + m_1 p_1^2 u_1,$$

$$h_1 = \frac{g}{\psi^2} (e_3^{(0)} + \operatorname{tg} \alpha_1 e_2) \parallel u_1.$$

Вектор $e_3^{(1)}$ определяется из равенства

$$c_1 e_3^{(1)} + p_1 u_1 + h_1 = y'_1 e_3^{(0)},$$

а для угла α_1 получаем неравенство

$$p_1 \sin \alpha_1 - c_1 \leq \frac{g}{\psi^2} \operatorname{tg} \alpha_1 \leq p_1 \sin \alpha_1 + c_1.$$

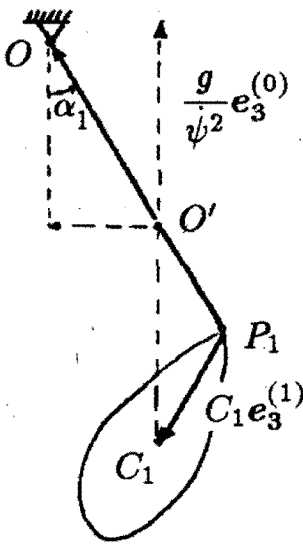


Рис. 4а

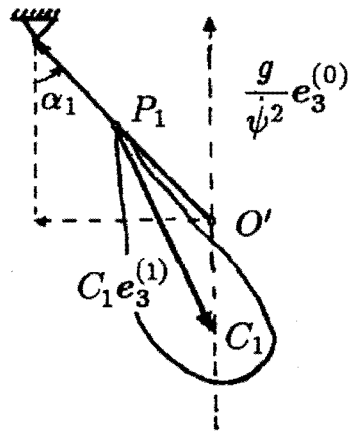


Рис. 4б

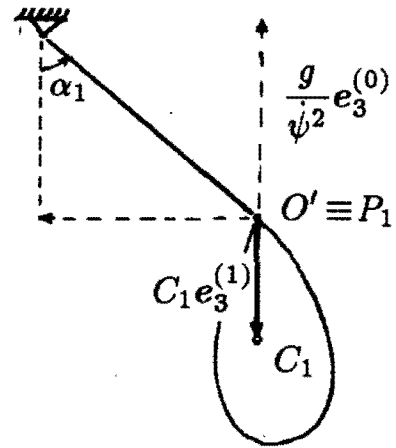


Рис. 4в

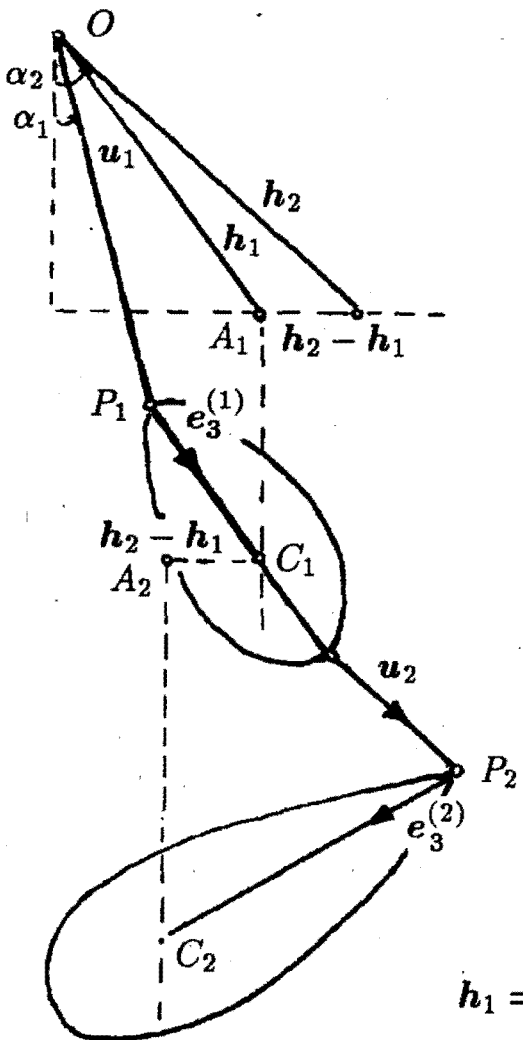


Рис. 5

Геометрическое построение решения представлено на рис. 4. Случай 4а) получается, если $|p_1 \sin \alpha_1| > \left| \frac{g}{\psi^2} \operatorname{tg} \alpha_1 \right|$, если $|p_1 \sin \alpha_1| < \frac{g}{\psi^2} |\operatorname{tg} \alpha_1|$ имеем рис. 4б), а случай 4в), когда $|p_1 \sin \alpha_1| = \left| \frac{g}{\psi^2} \operatorname{tg} \alpha_1 \right|$ — невозможен. Действительно, тогда из равенство (21) следует, что

$$x_1 = \frac{\psi^2 \sin \alpha_1}{|e_3^{(1)} \times e_3^{(0)}|} = \infty,$$

откуда, принимая в виду (19) и (20), имеем $\varphi_1 = \infty$.

2. Если $n = 2$, уравнения имеют вид

$$c_1 e_3^{(1)} + p_1 u_1 + h_1 = y_1'' e_3^{(0)},$$

$$(l_1 - c_1) e_3^{(1)} + p_2 u_2 + h_2 - h_1 = y_2'' e_3^{(0)},$$

где

$$h_1 = \frac{g}{\psi^2} (e_3^{(0)} + \operatorname{tg} \alpha_1 e_2) + \frac{g}{\psi^2} \frac{m_2}{m_1} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) e_2,$$

$$h_2 = \frac{g}{\psi^2} (e_3^{(0)} + \operatorname{tg} \alpha_2 e_2).$$

Соответствующее геометрическое изображение представлено на рис. 5. Угол α_1 считаем произвольный, а α_2 нужно выбрать таким образом, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1 C_1}$ и $\overrightarrow{A_2 C_2}$ были коллинеарными вектору $e_3^{(0)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Темченко, М. Е. О стационарных движениях двух связанных тел. Динамика и устойчивость сложных систем. — И-т математики АН УССР, 1981, 95–105.
2. Ишлинский, А. Ю. О разветвлении устойчивых положений динамического равновесия одной механической системы. — Прикладные задачи механики, т. 2, М., Наука, 1986, 94–106.
3. Ишлинский, А. Ю. Метод балансировки вращающихся тел на струнном подвесе. — Прикладные задачи механики, т. 2, М., Наука, 1986, 123–140.
4. Витенбург, Й. Динамика систем твердых тел, М., Мир, 1980.
5. Василева, Н., Л. Лилов. Тензорная форма управлений Лагранжа. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и информ., 82, кн. 2 — Механика, 1988.
6. Василева, Н., Л. Лилов. Устойчивость стационарных движений системы гироскопов Лагранжа со структурой дерева. — Теоретична и приложна механика., С., 1987, год. XVIII, №1.

Поступила 12.03.1991