ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 84, 1990

ЕКСТРЕМАЛНИ ЛОКАЛНО ДЪРВООБРАЗНИ ГРАФИ

НИКОЛА МАРТИНОВ

Никола Мартинов. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНО-ДЕРЕВООБРАЗНЫЕ ГРАФЫ

Рассматривается множество LT_1 тех локально-деревообразных графов, которые имеют минимальное число ребер по отношению к числу вершин. Найдены несколько характеризаций класса LT_1. Для произвольного графа G из LT_1 определена его линейная древесность $\Xi(G)$, т. е. минимальное число систем вершинно-непересекающихся простых цепей, покрывающих G. Доказано, что $\Xi(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$.

Nikola Martinov. EXTERNAL LOCALLY-TREE-LIKE GRAPHS

We deal with the set LT_1 of those locally-tree-like graphs, which have a minimal number of edges according to the number of the vertices. Different characteristics of the class LT_1 are found. If G is an arbitrary graph in LT_1, we find its linear arboricity $\Xi(G)$, i.e. the minimal number of vertex disjoint systems of simple chains covering G. It is proved that $\Xi(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$.

1. ВЪВЕДЕНИЕ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Разглеждаме крайни и неориентирани графи без възли и кратни ръбове, придържайки се към терминологията и означенията на Харари [3]. Ако G е граф, с $V(G)$ и $E(G)$ означаваме съответно съвкупностите на върховете и ръбовете му; за краткост вместо $|V(G)|$ ще пишем $|G|$. С $V_m(G)$ означаваме съвкупността на върховете със степен m. Подграф на G, който е изоморфен на пълния граф K_n с n върха, наричаме n-клика. Нека $X_n(G)$ е съвкупността на n-кликите. Подмножеството $U \subset V(G)$ е разделящо, когато графът $G - U$ (породен от $V(G) \setminus U$, т. е. максималният подграф с тези върхове) е несвързан. Минималните (относно включване) разделящи множества наричаме върхови разрези. С $R(G)$ означаваме съвкупността на върховите разрези, а с $\hat{R}(G)$ — съвкупността от подграфите на G, породени от елементите на $R(G)$. Ако $v \in V(G)$, с G_v ще означим подграфа на G, породен от съседните на v върхове. Нека $\Delta(G)$ е максималната степен на върховете на G. Когато всички върхове имат една и съща степен (m), G е *регулярен граф* (m-регулярен). Графът G се нарича *локално дървообразен*, когато за всеки негов връх v подграфът G_v е дърво, т. е. свързан граф без цикли. С LT означаваме съвкупността на свързаните локално дървообразни графи. Графите от класа LT са изследвани в [1, 2, 5] относно връзките между броя на върховете и ръбовете им и относно конструктивното им описание. С LT_1 означаваме съвкупността на графите от LT, които имат минимален брой ръбове (спрямо броя на върховете им). В тази статия, като се използват някои известни резултати за LT, се дават различни характеризации на класа LT_1 и се определят някои негови инварианти.

Всяко обединение на върхово непресичащи се прости вериги се нарича *линейна гора*. Линейната дървесност $\Xi(G)$ на графа G е минималният брой линейни гори, чието обединение е G. Този инвариант, носещ големи възможности за приложения, се определя доста трудно. Почти непосредствено се съобразява, че $\Xi(G) \geqq \left[\dfrac{\Delta(G)+1}{2}\right]$, но не са намерени всички графи, за които се достига равенство. Хипотезата, издигната в [4], че ако G е m-регулярен граф, то $\Xi(G) = \left[\dfrac{\Delta(G)+2}{2}\right]$ досега е потвърдена само за някой стойности на m. Линейната дървесност на граф с произволни степени на върховете е определена в съвсем малко случаи. Когато G е дърво, изпълнено е

$$\Xi(G) = \left[\frac{\Delta(G)+1}{2}\right], \tag{1}$$

което се съобразява лесно, защото G няма цикли. Когато всеки ръб на G може да се съдържа най-много в един цикъл, т. е. когато G е кактус, равенството (1) продължава да е в сила (вж. [6]). Тук доказваме, че (1) е изпълнено за всеки граф от LT_1; тогава ръб на G може да се съдържа в произволен брой цикли.

2. КОНСТРУКТИВНО ХАРАКТЕРИЗИРАНЕ НА КЛАСА LT_1

В [2] се изследва клас графи, обхващащ съвкупността LT, но от доказаната там теорема 1 непосредствено следва, че за LT е в сила

Лема 1. *Следните три твърдения са еквивалентни:*

а) $G \in LT$ *и* $|E(G)| = 2|G| - 3$;

б) *G се получава от K_2 чрез последователно прилагане на операцията „добавяне на нов връх и съединяване на този връх с два съседни върха“;*

в) $G \in LT_1$.

Ще докажем

Теорема 1. *Нека $G \in LT$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

а) $\hat{R}(G) \subset E(G)$;

б) $|E(G)| = 2|G| - 3$;

в) *G се получава от K_2 чрез последователно прилагане на операцията „добавяне на нов връх и свързване на този връх с два съседни върха“.*

Доказателство. **1.** От а) следва б). Доказателството на този пункт ще извършим чрез индукция по броя на върховете. Минималният граф от LT, който има върхови разрези, е $K_4 - x$ и за него е изпълнено б). Нека $|G| > 4$ и $a \in R(G)$, като u и v са върховете в a, които са съседни. Означаваме с G_0 една от компонентите на $G - a$. Нека G' е обединението на G_0 с ръба uv, а G'' — допълнението на G_0 до G. Тъй като u е връх на G_v (и v е връх на G_u), то G' и G'' са графи от LT и съгласно индукционното предположение

$$|E(G')| = 2|G'| - 3, \quad |E(G'')| = 2|G''| - 3.$$

Оттук, като вземем предвид, че

$$|G| = |G'| + |G''| - 2, \quad |E(G)| = |E(G')| + |E(G'')| - 1,$$

получаваме б).

2. От в) следва а). Отново ще приложим индукция по броя на върховете. За $K_4 - x$ е изпълнено а). Предполагаме $|G| > 4$. Съгласно в) графът G е получен от граф G_1 чрез добавяне на нов връх и съединяването му с два съседни върха u и v. Съгласно индукционното предположение $\hat{R}(G_1) \subset E(G_1)$. Но $\hat{R}(G)$ се състои от $\hat{R}(G_1)$ и ръба uv, следователно и за G е изпълнено а).

От твърденията 1 и 2 и от лема 1 следва еквивалентността на всеки две от твърденията а), б) и в). От твърдението в) на тази теорема непосредствено получаваме следните две следствия:

Следствие 1. *Всеки граф от LT_1 е еднозначно 3-оцветим.*

Следствие 2. *Всеки граф от LT_1 е планарен.*

3. ЛИНЕЙНА ДЪРВЕСНОСТ НА ГРАФИТЕ ОТ LT_1

Лема 2. *За всеки граф от LT_1 е изпълнено поне едно от следните две твърдения:*

а) *има връх със степен 2, на който поне единият от съседите не е с максимална степен;*

б) *има връх с максимална степен, на който поне два от съседите са със степен 2.*

Доказателство. Ще приложим индукция по броя n на върховете. Единственият граф от LT_1 с 4 върха е $K_4 - x$ и за него лемата е изпълнена. Предполагаме, че $n > 4$ и че лемата е изпълнена за всеки граф от LT_1 с $n - 1$ върха, като ще я докажем за графа G от LT_1 с n върха. Съгласно лема 1 графът G се получава от граф $H \in LT_1$ чрез добавяне на нов връх v и свързване на v с два съседни върха v_1 и v_2 на H. Съгласно индукционното предположение, за H е изпълнено поне едно от твърденията а) и б).

Нека за H е изпълнено а). Това означава, че H съдържа триъгълник uu_1u_2, като u е със степен 2, а u_1 — със степен, по-малка от максималната степен $m = \Delta(H)$. От $|H| \geqq 4$ следва, че $m > 3$. Да допуснем, че за G не е изпълнено а). От това следва, че v не е съседен с u и че съседите на u и v са с максималната степен на G (спрямо G). Оттук получаваме $\deg_H u_1 = m - 1$, $v_1 = u_1$, което означава, че за G е изпълнено б): u_1 е с максималната степен m на G, а съседите u и v на u_1 са със степен 2 спрямо G.

Нека за H е изпълнено б), но не е изпълнено а). Тогава H ще има два триъгълника ww_1w_2 и ww_3w_4, като w_2 и w_4 са със степен 2, а w, w_1, w_3 — със степен $m = \Delta(H)$. Ако $w_1 = w_3 = v_1$ и $w = v_2$, то за G ще е изпълнено б). Ако пък това твърдение не е изпълнено, но пак $\Delta(G) = m+1$, тъй като поне единият от несъседните върхове w_2 и w_4 ще има степен 2 (спрямо G), то за G ще е изпълнено а). Поради това предполагаме $\Delta(G) = m$. Тогава съгласно свойството в) на теорема 1 върхът v не може да бъде съседен с никой от w_1, w_2, w_3, w_4, w и следователно за G ще е изпълнено б). С това доказателството на лемата е завършено.

Ще въведем още някои означения. Нека подграфът h на графа H е линейна гора, т. е. обединение на върхово непресичащи се прости вериги. Ако върхът v на H е вътрешен или е край на верига от h, или не принадлежи на никоя от веригите на h, означаваме съответно

$$v \, \mathrm{Z}\, h, \qquad v\, \mathrm{Z}_0 h, \qquad v \not\mathrm{Z}\, h.$$

Теорема 2. *Ако* $G \in LT_1$, $|G| \geqq 4$ *и* $\Delta(G) = m$, *то* $\Xi(G) = \left[\dfrac{m+1}{2}\right]$.

Доказателство. Ще приложим индукция по броя на върховете. Ако $|G| = 4$, то $G = K_4 - x$ и $\Xi(G) = 2$, т. е. теоремата е изпълнена. Предполагаме, че $|G| > 4$ и теоремата е изпълнена за всеки граф от LT_1 с $|G|-1$ върха. Съгласно лема 2 за G е изпълнено поне едно от твърденията а) и б) в нея.

1. Нека е изпълнено а), т. е. G има триъгълник vv_1v_2, като $\deg v = 2$, а $\deg v_1 \leqq m-1$. Графът $G - v = H \in LT_1$ и съгласно индукционното предположение $\Xi(H) = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, където $n = \Delta(H)$. Класовете вериги (линейни гори) на H, чийто брой е $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, означаваме съответно

$$h_1, h_2, \ldots, h_s, \qquad s = \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{2}$$

Очевидно $n \leqq m$ и е възможно само или $n = m$, или $n = m - 1$.

1.1. Нека $n = m$. Тогава $\deg_H v_1 = \deg_G v_1 - 1 \leqq n - 2$. Оттук следва, че или v_1 не е връх на никоя от веригите на поне един клас от (2), или е край на вериги от поне два класа. Следователно можем да предполагаме, че е изпълнен поне един от следните два случая:

а′) $v_1 \not\mathrm{Z}\, h_1$;

б′) $v_1\, \mathrm{Z}_0\, h_1$ и $v_1\, \mathrm{Z}_0\, h_2$.

Освен това $\deg_H v_2 = \deg_G v_2 - 1 \leqq n - 1$, което означава, че за поне един клас h от (2) не е изпълнено $v_2\, \mathrm{Z}\, h$. Тогава прибавяме ръба $v_2 v$ към класа h; в случая а′) прибавяме ръба $v_1 v$ към класа h_1, а в случая б′) — към този от класовете h_1 и h_2, който е различен от h. Така коригираните и запазени по брой класове от (2) образуват покритие на G от линейни гори. Следователно $\Xi(G) = \Xi(H) = \left[\dfrac{m+1}{2}\right]$.

1.2. Нека $n = m - 1$. Това означава, че само v_2 има степен m. Сега ще разгледаме отделно случаите, когато m е четно или нечетно.

1.2.1. Нека $m = 2k$ (k — цяло). От $\deg_H v_2 = n$ и n — нечетно следва, че v_2 е край на верига от клас h от (2). От $\deg_H v_1 \leqq n - 1$ и n — нечетно следва, че v_1 или не е връх на никоя верига от някой клас от (2), или е край на вериги от поне два класа от (2). Следователно отново попадаме в разгледания случай 1.1.

1.2.2. Нека $m = 2k+1$. Сега $\left[\dfrac{m+1}{2}\right] = k+1$, а $\left[\dfrac{n+1}{2}\right] = k$. Следователно, ако към класовете (2) прибавим нов клас h_{k+1}, съдържащ единствено веригата $v_1 v v_2$, ще получим точно $\left[\dfrac{m+1}{2}\right]$ линейни гори, покриващи G. С това изчерпахме всички подслучаи на случай 1.

2. Нека за G е изпълнено твърдението б) на лема 2, т. е. G има два триъгълника $v v_1 v_2$ и $u u_1 v_2$, като $\deg v = \deg u = 2$ и $\deg v_2 = m$. Предполагаме още, че за G не е изпълнено твърдението а) на лема 2, т. е. $\{u_1, v_1\} \not\subset V_m(G)$. Отново означаваме $G - v = H$, $\Delta(H) = n$. За графа H е в сила теорема 2, поради което предполагаме, че този граф е разбит на $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ непресичащи се линейни гори, означени с (2). И сега за n е изпълнено или $n = m$, или $n = m - 1$.

2.1. Нека $n = m$. Ще разгледаме отделно случаите, когато m е четно или нечетно.

2.1.1. Нека $m = 2k$. Тогава $\deg_H v_1 = \deg_H v_2 = 2k - 1$, откъдето следва, че v_1 и v_2 са краища на вериги от два класа от (2), които могат и да съвпадат.

2.1.1а) Нека $v_1\, \mathrm{Z}_0\, h_1$, $v_2\, \mathrm{Z}_0\, h_2$. Тогава причисляваме ръбовете $v v_1$ и $v v_2$ съответно към h_1 и h_2 и получаваме същия брой $\left[\dfrac{m+1}{2}\right]$ непресичащи се линейни гори, покриващи G.

2.1.1б) Нека $v_1\, \mathrm{Z}_0\, h_1$, $v_2\, \mathrm{Z}_0\, h_1$. Ако ръбът $u v_2$ не принадлежи на h_1 (т. е. ако е от h_2), прехвърляме го към h_1 и получаваме, че v_1 и v_2 са краища на вериги от различни класове. Така свеждаме случая към разгледания вече случай 2.1.1а).

Нека ръбът uv_2 е от класа h_1. Ако $u \,\mathrm{Z}_0\, h_1$, като причислим ръбовете vv_1 и vv_2 към h_1, няма да получим цикъл, а покритие на G от същия брой $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ непресичащи се линейни гори. Нека $u \,\mathrm{Z}\, h_1$. Тогава ръбът u_1v_2 е извън h_1; нека е от h_2. Правим следната промяна: прехвърляме ръба uu_1 към h_2, а u_1v_2 към h_1. За така коригираните линейни гори върховете v_1 и v_2 са краища на вериги от различни класове и отново свеждаме случая към 2.1.1a). С това случаят 2.1.1 е напълно изчерпан.

2.1.2. Нека $m = 2k+1$. Тогава $\deg_H v_1 = \deg_H v_2 = 2k$. Това означава, че всеки от върховете v_1 и v_2 или е извън някой от класовете (2), или е край на две вериги от тези класове. Следователно изпълнено е:

$$v_1 \not\mathrm{Z}\, h_1 \text{ или } v_1 \,\mathrm{Z}_0\, h_1 \text{ и } v_1 \,\mathrm{Z}_0\, h_2; \qquad v_2 \not\mathrm{Z}\, h'_1 \text{ или } v_2 \,\mathrm{Z}_0\, h'_1 \text{ и } v_2 \,\mathrm{Z}_0\, h'_2,$$

като $h'_1 \neq h'_2$, но е възможно съвпадение на някой от h_1, h_2 с някой от h'_1, h'_2. Причисляваме ръба vv_1 към h_1. Ръба vv_2 причисляваме към h'_1, когато $v_2 \not\mathrm{Z}\, h'_1$, и към този от h'_1, h'_2, който е различен от h_1, когато $v_2 \,\mathrm{Z}_0\, h'_1$. Така допълнените класове не съдържат цикли, т. е. са непресичащи се линейни гори, покриващи G. Следователно в този случай $\Xi(G) = \left[\frac{m+1}{2}\right]$.
По този начин е изчерпан случай 2.1.

2.2. Нека $n = m-1$. Оттук следва, че $u_1 = v_1$ и v_1 и v_2 са единствените върхове със степен m. При $m = 2k+1$ ще бъде изпълнено $\left[\frac{m+1}{2}\right] = k+1$ и $\left[\frac{n+1}{2}\right] = k$. Тогава, като добавим към линейните гори (2) още една, съдържаща само веригата v_1vv_2, ще получим $k+1$ непресичащи се линейни гори, покриващи G, т. е. $\Xi(G) = \left[\frac{m+1}{2}\right]$.

Нека $m = 2k$. Тогава $\deg_H v_1 = \deg_H v_2 = 2k-1$ и отново попадаме на случай 2.1.1. С това доказателството на теоремата е завършено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартинов, Н. Върху един клас графи. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **71**, 1976–77, 119–129.
2. Мартинов, Н. Локально деревообразные графы и их обобщения. — Докл. БАН, **39**, № 7, 1986, 45–48.
3. Харари, Ф. Теория графов. М., 1973.
4. Akiyama, J., G. Exoo, F. Harary. Covering and packing in graphs III: Cyclic and acyclic invariants. — Math. Slovaca, **30**, 1980, 401–417.
5. Zelinka, B. Locally-tree-like graphs. — Gas. pest. mat., **108**, 1983, 230–238.
6. Zelinka, B. Domatic number and linear arboricity of cacti. — Math. Slovaca, **36**, 1986, № 1, 49–54.

Получена 21.03.1991