

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 85, 1991

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 85, 1991

---

## ЧАСТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ШАРА, КАТЯЩЕГОСЯ ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОМУ ТОРУ

СОНЯ ДЕНЕВА

*Соня Денева.* ЧАСТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ШАРА, КАТЯЩЕГОСЯ ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОМУ ТОРУ

В работе затронуты некоторые аспекты классической неголономной задачи о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности под действием его тяжести.

*Sonia Deneva.* PARTICULAR MOVEMENTS OF ROLLING SPHERE ON ABSOLUTELY ROUGH TORE

In this paper are considered some aspects of the classical unholonomic problem about rolling sphere on absolutely rough surface under the action of weight.

В настоящей работе затронуты некоторые аспекты классической неголономной задачи о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности под действием его тяжести. В этой задаче имеются девять неизвестных — координаты  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$  центра тяжести  $G$  шара, углы Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  подвижного триэдра, неизменно связанного с шаром и компоненты реакции поверхности  $N$ , действующих на шар. Требование, чтобы тело не покидало поверхность, ведет к тому, что координаты центра  $G$  зависят от двух параметров, откуда имеем пять независимых параметров. Условия качения без скольжения редуцируются до двух зависимостей между обобщенными скоростями, так что остаются три независимых параметра, для определения которых можно взять три уравнения неголономной динамики, например, уравнения Аппеля. Компоненты неизвестной реакции

определяются из уравнений движения центра тяжести  $G$  шара.

Пусть  $G\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$  соответственно подвижная, связанная с движущимся телом с началом в его центре масс  $G$ , и неподвижная системы координат,  $A, B, C$  — главные моменты инерции шара,  $p, q, r$  — проекции угловой скорости  $\omega$  тела на оси подвижной системы координат. Обозначим через  $m$  и  $a$  массу шара и его радиус,  $n^0(n_x, n_y, n_z)$  — единичный вектор внешней нормали в точке  $P$  соприкосновения шара с поверхностью качения. Пусть  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  и  $R_x, R_y, R_z$  — проекции соответственно угловой скорости  $\Omega$  поверхности качения и радиус-вектора  $R$  точки  $P$  той же поверхности относительно неподвижных осей.

## 1. НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ШАРА ПО РАВНОМЕРНО- ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

Из формулы для скорости точки абсолютно твердого тела имеем

$$(1) \quad v_P = v_G + \omega \times GP,$$

где как и выше  $G$  — центр тяжести тела,  $P$  — точка соприкосновения шара с поверхностью. Принимая, что рассматриваемая поверхность вращается, получим

$$(2) \quad v_P = \Omega \times R_P.$$

Так как  $n^0$  общий нормальный вектор для обеих соприкасающихся поверхностей, будем иметь

$$(3) \quad GP = -an^0.$$

Из (1), (2) и (3) находим неголономную связь

$$(4) \quad v_G = a(\omega \times n^0) + \Omega \times R_P.$$

Когда опорная поверхность неподвижна  $v_P = 0$ , т. е. для точки соприкосновения шара имеем качение без скольжения.

Уравнения движения шара находим из уравнений Аппеля в квазиординатах

$$(5) \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

где  $S$  энергия ускорений шара,  $Q_j$  — обобщенные силы,  $s$  — число степеней свободы.

Для квазиординат выберем проекции угловой скорости шара на оси координат подвижной системы, т. е.

$$(6) \quad \dot{\pi}_1 = p, \quad \dot{\pi}_2 = q, \quad \dot{\pi}_3 = r.$$

В нашем случае число степеней свободы  $s = 3$ , так как с помощью неголономных связей (4) можно исключить два параметра, определяющих

положение центра масс, в результате которого остаются три независимые параметры. Таким образом можно задать положение шара тремя углами Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$  и  $\psi$ , входящие в квазикоординатах (6).

Энергия ускорения  $S$  равна [1]

$$(7) \quad S = \frac{mw_G^2}{2} + S',$$

где  $S'$  определяется выражением

$$(8) \quad S' = \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + \dot{p}qr(C - B) + \dot{q}rp(A - C) + \dot{r}pq(B - A) + \dots$$

Здесь опущены члены, не содержащие  $\dot{p}$ ,  $\dot{q}$  и  $\dot{r}$ . При помощи (4) находим

$$(9) \quad \begin{aligned} \omega_G^2 = & a^2\dot{\omega}^2 - a^2(\dot{\omega} \cdot n^0)^2 - 2a^2(\dot{\omega} \cdot n^0)(\omega \cdot n^0) \\ & + 2a(\dot{\omega} \cdot \Omega)(n^0 \cdot \dot{R}) - 2a(\dot{\omega} \cdot \dot{R})(\Omega \cdot n^0) + \dots \end{aligned}$$

Здесь принимается, что  $\Omega$  постоянный вектор, т. е. поверхность качения вращается равномерно. Здесь многоточием обозначены члены, не содержащие  $\dot{\omega}$ . Обобщенные силы  $Q_j$  определяются по формулам [2]

$$(10) \quad Q_j = \sum_{\nu=1}^N F_\nu a_{\nu j},$$

где  $F_\nu$  — внутренние силы, действующие на систему. В рассматриваемом случае имеется только одна такая сила — сила тяжести

$$(11) \quad F = -mgk.$$

Здесь  $i, j, k$  — орты неподвижной системы  $Oxyz$ . Векторы  $a_{\nu j}$  определяются по формулам [2, стр. 895]

$$(12) \quad v_\nu = \sum_{j=1}^3 a_{\nu j} \dot{\pi}_j + a_\nu.$$

В рассматриваемом случае имеем

$$(13) \quad v_\nu = v_G + \omega \times \rho_\nu,$$

где  $\rho_\nu = \xi_\nu \xi^0 + \eta_\nu \eta^0 + \zeta_\nu \zeta^0$  — радиус-вектор произвольной точки шара. Принимая в виду, что

$$\omega = \dot{\pi}_1 \xi^0 + \dot{\pi}_2 \eta^0 + \dot{\pi}_3 \zeta^0$$

из (4), (12) и (13) находим

$$(14) \quad \begin{aligned} a_{\nu 1} = & a(\zeta^0 n_\eta - \eta^0 n_\zeta) + \zeta^0 \eta_\nu - \eta^0 \zeta_\nu, \\ a_{\nu 2} = & a(\xi^0 n_\zeta - \zeta^0 n_\xi) + \xi^0 \zeta_\nu - \zeta^0 \xi_\nu, \\ a_{\nu 3} = & a(\eta^0 n_\xi - \xi^0 n_\eta) + \eta^0 \xi_\nu - \xi^0 \eta_\nu. \end{aligned}$$

Здесь  $\xi^0, \eta^0, \zeta^0$  — орты системы  $G\xi\eta\zeta$ ,  $n_\xi, n_\eta, n_\zeta$  — компоненты вектора  $n^0$  относительно тех же подвижных осей. Подставляя (14) в (10), согласно (11) получим

$$(15) \quad Q_1 = mga(k \times n^0)\xi^0, \quad Q_2 = mga(k \times n^0)\eta^0, \quad Q_3 = mga(k \times n^0)\zeta^0,$$

где приняты во внимание зависимости

$$\sum_{\nu=1}^N m_\nu \xi_\nu = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \eta_\nu = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \zeta_\nu = 0,$$

которые следуют из условий, что центр масс  $G$  шара совпадает с его геометрическим центром. Согласно (7), (8), (9) и (15) из (5) находим уравнения движения шара

$$\begin{aligned} & A\dot{p} - (B - C)qr + ma^2\dot{p} - ma^2(\dot{\omega} \cdot n^0)(n^0 \cdot \xi^0) - ma^2(\omega \cdot n^0)(\dot{n}^0 \cdot \xi^0) \\ & \quad + ma(n^0 \cdot \dot{R})(\Omega \cdot \xi^0) - ma(\Omega \cdot n^0)(\dot{R} \cdot \xi^0) = mga(k \times n^0)\xi^0, \\ & B\dot{q} - (C - A)rp + ma^2\dot{q} - ma^2(\dot{\omega} \cdot n^0)(n^0 \cdot \eta^0) - ma^2(\omega \cdot n^0)(\dot{n}^0 \cdot \eta^0) \\ (16) \quad & \quad + ma(n^0 \cdot \dot{R})(\Omega \cdot \eta^0) - ma(\Omega \cdot n^0)(\dot{R} \cdot \eta^0) = mga(k \times n^0)\eta^0, \\ & C\dot{r} - (A - B)pq + ma^2\dot{r} - ma^2(\dot{\omega} \cdot n^0)(n^0 \cdot \zeta^0) - ma^2(\omega \cdot n^0)(\dot{n}^0 \cdot \zeta^0) \\ & \quad + ma(n^0 \cdot \dot{R})(\Omega \cdot \zeta^0) - ma(\Omega \cdot n^0)(\dot{R} \cdot \zeta^0) = mga(k \times n^0)\zeta^0. \end{aligned}$$

Из (16) в частности можно получить уравнения движения шара для случая когда опорная поверхность неподвижна, т. е.  $\Omega = 0$ .

Реакция поверхности опоры на шаре определяется из уравнения

$$(17) \quad mw_G = -mgk + N.$$

Из (17) находим, что компонента  $N$  на общей нормали двух поверхностей  $N_u$  определяется из формулы

$$(18) \quad N_u = mw_G \cdot n^0 + mg(k \cdot n^0).$$

## 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТОРА

Тор поверхность вращения, которую можно определить как поверхность, порожденная вращением окружности около прямой линии, которая лежит в ее плоскости, но ее не пересекает. Пусть эта окружность расположена на координатной плоскости  $Oyz$  и  $Oz$  ее ротационная ось (рис. 1). Обозначим через  $R_1$  расстояние  $OO_1$ , где  $O_1$  — центр окружности, а  $R_2$

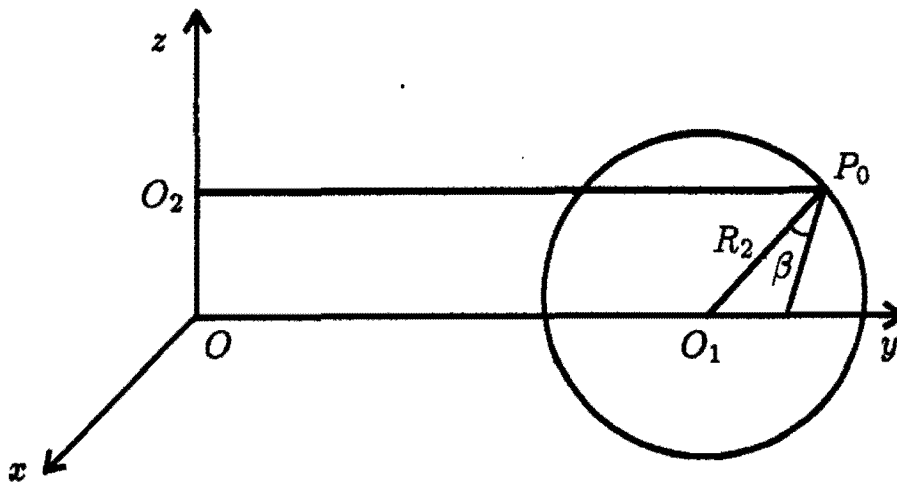


Рис. 1

— ее радиус. Если  $P_0$  точка окружности, то очевидно имеем

$$z_{P_0} = R_2 \cos \beta,$$

где  $\beta$  — угол  $(O_1z, O_1P_0)$ .

Когда окружность вертится около оси  $Oz$ , точка  $P_0$  описывает окружность с центром  $O_2$ . Для расстояния  $O_2P_0$  имеем

$$O_2P_0 = R_1 + R_2 \sin \beta.$$

Очевидно,  $P_0$  описывает окружность на торе с параметрическими уравнениями относительно координатной плоскости  $Oxy$  вида

$$x = (R_1 + R_2 \sin \beta) \cos \alpha,$$

$$y = (R_1 + R_2 \sin \beta) \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  угол между осью  $Ox$  и прямой линии  $O_2P$ . Точка  $P$  лежит на торе и, следовательно, его параметрические уравнения будут

$$x = (R_1 + R_2 \sin \beta) \cos \alpha,$$

$$(19) \quad y = (R_1 + R_2 \sin \beta) \sin \alpha,$$

$$z = R_2 \cos \beta.$$

Непосредственно видно, что единичный внешний вектор нормали поверхности (19) имеет вид

$$(20) \quad n^0 = \cos \alpha \sin \beta i + \sin \alpha \sin \beta j + \cos \beta k,$$

где  $\alpha \in [0, 2\pi)$ ,  $\beta \in [0, 2\pi)$ .

### 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ШАРА ПО НЕПОДВИЖНОМ И РАВНОМЕРНО КРУТЯЩЕМСЯ ТОРЕ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ

Рассмотрим движение неоднородного и в частности однородного шара на торе, когда точка соприкосновения шара описывает параллель на торе, т. е. когда  $\beta = \text{const}$ .

Центр шара определяем из уравнения

$$(21) \quad r_G + r_P + an^0,$$

откуда для координат  $G$  получаем согласно (19) и (20)

$$(22) \quad \begin{aligned} x_G &= [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] \cos \alpha, \\ y_G &= [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] \sin \alpha, \\ z_G &= (R_2 + a) \cos \beta. \end{aligned}$$

Предположим, что тор равномерно вращается около вертикальной оси, т. е.

$$(23) \quad \Omega = \Omega k, \quad \Omega > 0.$$

Неголономные связи, проектированные на неподвижные оси согласно (4), (20), (21) и (23) имеют вид

$$(24) \quad \begin{aligned} v_{G_x} &= a(\cos \beta \omega_y - \sin \alpha \sin \beta \omega_z) - \Omega \sin \alpha (R_1 + R_2 \sin \beta), \\ v_{G_y} &= a(\cos \alpha \sin \beta \omega_z - \cos \beta \omega_x) + \Omega \cos \alpha (R_1 + R_2 \sin \beta), \\ v_{G_z} &= a \sin \beta (\omega_x \sin \alpha - \omega_y \cos \alpha), \end{aligned}$$

где компоненты вектора  $\omega$  определяются из формул Эйлера

$$(25) \quad \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned}$$

Имея ввиду, что  $v_{G_x} = \dot{x}_G$ ,  $v_{G_y} = \dot{y}_G$ ,  $v_{G_z} = \dot{z}_G$  из (22) и (24) находим зависимость для случая  $\beta = \text{const}$ :

$$(26) \quad \dot{\theta} \sin(\alpha - \psi) + \dot{\varphi} \sin \theta \cos(\alpha - \psi) = 0.$$

Рассмотрим некоторые частные движения шара, соответствующие зависимости (26).

#### СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ НУТАЦИИ ПОДВИЖНОГО ТРИЭДРА

Здесь принимаем, что  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ , т. е.  $\dot{\theta} = 0$ . Тогда (26) удовлетворяется при

$$(27) \quad \alpha = \psi + \frac{\pi}{2}.$$

Из (27) и  $\dot{x}_G = v_{G_x}$  согласно (20) и (22) получаем

$$(28) \quad \dot{\psi} = \nu \dot{\varphi} + \Omega,$$

где  $\nu = \frac{a \sin(\theta_0 + \beta)}{R_1 + R_2 \sin \beta}$  — постоянная величина. Покажем, что при динамической симметрии шара, т. е. в случаях когда  $A = B$ , угловые скорости  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  постоянные. Для этой цели исходим из кинетического момента  $K_P$  шара относительно точки касания  $P$ , для которого имеем

$$(29) \quad \frac{dK_P}{dt} = PG_x(-mgk).$$

Умножая (29) на  $k$ , получим интеграл кинетического момента

$$(30) \quad K_P k = C_1 = \text{const.}$$

Из дефиниции кинетического момента имеем

$$(31) \quad K_P = K_G + m(GP \times v_G) = A p \xi^0 + B q \eta^0 + C r \zeta^0 + m a (v_G \times n^0).$$

Согласно (4) и (31) из (30) находим

$$(32) \quad A p a_{31} + B q a_{32} + C r a_{33} + m a^2 \cos \beta (\omega \cdot n^0) - m a^2 \omega_z = C_1.$$

При  $A = B$  согласно (24), (27) и (28) из (32) непосредственно получаем, что  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  постоянные. Рассмотрим уравнения Аппеля (16) для этого частного движения. Из (25) для этого случая имеем

$$(32) \quad \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta_0 \sin \psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta_0 \cos \psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Согласно (33) и (20) получим

$$(34) \quad (\dot{\omega} \cdot n^0) = 0, \quad (\dot{R}_P \cdot n^0) = 0.$$

Из формул для директорных косинусов имеем

$$(35) \quad \zeta^0 = \sin \psi \sin \theta_0 i - \cos \psi \sin \theta_0 j + \cos \theta_0 k.$$

Согласно (20), (27) и (35) получим

$$(36) \quad (\dot{n}^0 \cdot \zeta^0) = 0, \quad (\dot{R} \cdot \zeta^0) = 0, \quad (k \times n^0) \cdot \zeta^0 = 0.$$

Из (34) и (36) следует, что третье уравнение Аппеля в (16) удовлетворено тождественно. Аналогичными вычислениями первое и второе уравнение в (16) редуцируются на следующую зависимость

$$(37) \quad \begin{aligned} (A + m a^2) \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta_0 + (C + A) \dot{\psi} \sin \theta_0 (\dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}) \\ + m a^2 \dot{\psi} \sin \beta [\dot{\psi} \cos \beta + \dot{\varphi} \cos (\theta_0 + \beta)] \\ + m a \Omega \cos \beta (R_1 + R_2 \sin \beta) \dot{\psi} + m g a \sin \beta = 0. \end{aligned}$$

Подставляя (28) в (37), получаем следующее уравнение для  $\dot{\varphi}$ :

$$(38) \quad V \dot{\varphi}^2 + Q \dot{\varphi} + W = 0,$$

где величины  $V$ ,  $Q$ ,  $W$  и  $U$  определяются из выражений

$$\begin{aligned}
 V &= \nu^2(C - A) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \nu U \\
 Q &= \Omega \{2\nu(C - A) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + m a \nu \cos \beta [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] + U\} \\
 (39) \quad W &= \Omega^2 [(C - A) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + m a^2 \sin \beta \cos \beta + m a \cos \beta (R_1 + R_2 \sin \beta)] \\
 &\quad + m g a \sin \beta \\
 U &= C \sin \theta_0 + m a \nu \cos \beta [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta].
 \end{aligned}$$

Условие чтобы  $\dot{\psi}$ , определенная из (38), была реальной задается неравенством

$$(40) \quad \Delta = Q^2 - 4VW \geq 0.$$

Подставляя (39) в (40), после известных преобразований получим условие

$$(41) \quad \Omega^2 \geq \frac{4mga \sin \beta V}{C^2 \sin^2 \theta_0}.$$

Условие (41) наложит нижнюю границу для скорости  $\Omega$ , после которой возможно рассматриваемое частное движение шара на внешней поверхности вращающегося тора. Другое ограничение для  $\Omega$  получим из условия, что нормальная реакция  $N_n$  тора на шаре должна быть направлена по внешней нормали  $n^0$ . Из (18) и (21) получаем

$$(42) \quad N_n = mg \cos \beta - m \sin \beta \alpha^2 [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta].$$

Из (27), (42) и условия  $N_n > 0$  находим неравенство

$$(43) \quad \dot{\psi} < \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}}.$$

Согласно (28) и (38) из (43) получим

$$(44) \quad \frac{\nu \sqrt{\Delta}}{2V} + \Omega < \frac{\nu Q}{2V} + \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}},$$

где  $\Delta$  определяется из (40), а  $V$  и  $Q$  из (39). Из (44) имеем необходимое условие

$$\Omega < \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} + \frac{\nu Q}{2V},$$

которое ведет к ограничению для  $\Omega$

$$(45) \quad \Omega < \frac{2V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}}.$$

Из (41) и (45) следует, что по необходимости должно быть выполнено неравенство

$$(46) \quad \nu(C - A) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + C \sin \theta_0 + \frac{m a \nu \cos 2\beta}{\cos \beta} [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] > 0,$$



которое представляет ограничение для моментов инерции неоднородного шара. Из (44) получим более сильное неравенство для  $\Omega$ , а именно

$$(47) \quad \Omega < \frac{V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} + \frac{mag \nu \sin \beta}{C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}{g \cotg \beta}}$$

Непосредственно проверяется, что неравенство

$$\begin{aligned} \frac{V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} + \frac{mag \nu \sin \beta}{C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}{g \cotg \beta}} \\ < \frac{2V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} \end{aligned}$$

эквивалентно условию (44). В заключении имеем следующую теорему:

**Теорема.** Движение неоднородного шара по параллели на равномерно крутящемся и абсолютно шероховатом торе при постоянном угле нутации возможно, только когда скорость вращения тора удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \frac{2}{C \sin \theta_0} \sqrt{mag \sin \beta V} \leq \Omega \\ < \frac{V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} + \frac{mag \sin \beta}{C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}{g \cotg \beta}} \end{aligned}$$

и моменты инерции подчиненные неравенству (46).

В частности, если шар однородный, (46) редуцируется на условие

$$(48) \quad \frac{2}{5} a \sin \theta_0 \cos \beta + \nu \cos 2\beta [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] > 0.$$

Если угол параллели  $\beta \leq \frac{\pi}{4}$ , т. е.  $\cos 2\beta \geq 0$ , условие (48) выполнено для любого шара.

Если угол  $\beta$  удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{5}, \quad \text{т. е. } \cos 2\beta < 0,$$

то (48) выполнено только для шара, у которого

$$a < (R_1 + R_2 \sin \beta) \frac{\cotg \beta}{|\cos 2\beta| \sin(\theta_0 + \beta)} \left[ \frac{2}{5} \sin \theta_0 + \frac{\cos 2\beta}{\cos \beta} \sin(\theta_0 + \beta) \right]$$

и

$$\operatorname{tg} \theta_0 > \frac{\operatorname{tg} \beta |\cos 2\beta|}{0,4 + \cos 2\beta}$$

Если  $\beta \geq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{5}$ , условие (48) не выполнено, т. е. движение по большой параллели невозможно. Эти результаты легко перенести на случай неподвижного тора. В этом случае уравнение (38) имеет вид

$$(49) \quad V \dot{\varphi}^2 + mga \sin \beta = 0,$$

где  $V$  определено из (39). Очевидно, условие для действительности  $\dot{\varphi}$   $V < 0$ , которое ведет к ограничению

$$(50) \quad A > \frac{C \sin \theta_0 (1 + \nu \cos \theta_0) + ma^2 [\sin \theta_0 + \nu \sin \beta \cos \beta + \sin \beta \cos (\theta_0 + \beta)]}{\nu \sin \theta_0 \cos \theta_0}.$$

Легко видно, что (50) не удовлетворяется для однородного шара, если ????. Следовательно, в отличии от случая равномерно крутящегося тора, рассмотренное частное движение однородного шара по неподвижному тору невозможно.

Условие, чтобы нормальная реакция  $N_n$  направлена по  $n^0$ , в этом случае выражается тоже при помощи (43), т. е. имеем

$$(51) \quad \dot{\varphi}^2 < \frac{g \cotg \beta}{\nu^2 [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta]}.$$

Подставляя  $\dot{\varphi}^2$  из (49) в (51), для момента инерции  $A$  получим более сильное ограничение

$$A > A_0 + \frac{ma^2 \sin \beta}{\nu \sin \theta_0 \cos \theta_0},$$

где  $A_0$  правая сторона выражения (51).

**Замечание.** Частное движение шара по тору при постоянном угле нутации подвижного триэдра рассмотрено при наличии динамической симметрии относительно оси  $G\zeta$ , т. е. при  $A = B$ . Исходя из интеграла для кинетического момента (32) и третьего динамического уравнения (16), можно показать, что такое движение единственно возможно при  $A = B$ , т. е. последнее условие не только достаточно, но и необходимо.

#### СЛУЧАЙ ПОСТОЯННЫХ УГЛОВ НУТАЦИИ И СОБСТВЕННОГО ВРАЩЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ТРИЭДРА

В этом случае  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ ,  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$  и уравнение (26) удовлетворяется тождественно. Из равенства  $\dot{x}_G = v_{Gx}$  согласно (22) и (24) получим

$$(52) \quad \dot{\alpha} = \mu \dot{\psi} + \mu_1 \Omega,$$

где  $\mu$  и  $\mu_1$  константы

$$(53) \quad \mu = \frac{a \sin \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}, \quad \mu_1 = \frac{R_1 + R_2 \sin \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}.$$

Из интеграла для кинетического момента (32) находим

$$(54) \quad \dot{\psi} = \frac{C_1}{A \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + B \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + C \cos^2 \theta_0 - ma^2 \sin^2 \beta},$$

т. е. угловая скорость  $\dot{\psi}$  постоянная, а следовательно, согласно (52) постоянна и  $\dot{\alpha}$ . Покажем, что рассматриваемое движение возможно только

для однородного шара. В действительности третье уравнение (16) имеет вид

$$(55) \quad \begin{aligned} & (A - B)\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - ma^2 \sin \beta \cos \beta \sin \theta_0 \cos(\alpha - \psi) \dot{\alpha} \dot{\psi} \\ & - ma\Omega \cos \beta \sin \theta_0 \dot{\alpha} (R_1 + R_2 \sin \beta) \cos(\alpha - \psi) \\ & = mga \sin \beta \sin \theta_0 \cos(\alpha - \psi). \end{aligned}$$

Очевидно при  $A \neq B$  согласно (52) получилось бы, что  $\dot{\psi}$  является функцией величины  $\cos(\alpha - \psi)$ , которая не является постоянной величиной, что противоречит (54). Аналогично, из второго уравнения (16) получается, что  $A = C$ .

При  $A = B = C = \frac{2}{5}ma^2$  уравнение (55) имеет следующий вид

$$(56) \quad P\dot{\psi}^2 + Q\dot{\psi} + R = 0,$$

где

$$(57) \quad \begin{aligned} P &= a\mu \sin \beta \cos \beta, \\ Q &= \Omega[a\mu_1 \sin \beta \cos \beta + \mu \cos \beta (R_1 + R_2 \sin \beta)], \\ R &= \Omega^2 \mu_1 \cos \beta (R_1 + R_2 \sin \beta) + g \sin \beta. \end{aligned}$$

В соответствии с (53) и (57) для дискриминанты (56) получим

$$\Delta = Q^2 - 4PQ = -4ag\mu \sin^2 \beta \cos \beta.$$

Следовательно, движение в этом частном случае возможно только тогда, когда угол параллели находится в интервале

$$(58) \quad \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi,$$

т. е. в случае, когда шар движется по нижней внутренней стороне тора. Тогда нормальная компонента реакции тора удовлетворяет условию

$$(59) \quad N_u = (n^0 \cdot N) < 0.$$

Из формулы (42) имеем

$$N_u = mg \cos \beta - m \sin \beta \dot{\alpha}^2 [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta],$$

откуда видно, что согласно (58) условие (59) тождественно удовлетворяется. Следовательно рассмотренное частное движение во внутренней стороне тора возможно без ограничений для угловой скорости  $\Omega$ . Чтобы шар находился внутри тора имеем естественное ограничение  $a < R_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк, Ю. И., Н. А. Ф у ф а е в. Динамика неголономных систем. М., 1967.
2. Долапчиев, Б. л. Аналитична механика. С., 1966.
3. Д и а м а н д и е в, В. Търкаляне на кълбо върху абсолютно грава неподвижна сфера. — Год. Соф. унив., том 72, 1978.
4. С т о е в, Н., В. Д и а м а н д и е в. Търкаляне на кълбо върху абсолютно грава равномерно въртяща се сфера. — Год. Соф. унив., том 72, 1978.

Поступила 5.4.1992