ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 1 — Математика

Том 85, 1991

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 1 — Mathématiques

Tome 85, 1991

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРИВИЗНЫ*

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Иванка Иванова-Каратопраклиева. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРИВИЗНЫ

Исследованы бесконечно малые изгибания первого порядка трех семейств поверхностей вращения — S^2_λ, S^1_λ и S^0_λ (λ — параметр), знакопеременной гауссовой кривизны. Поверхности S^2_λ являются двухсвязными, S^1_λ — односвязными, S^0_λ — замкнутыми, и не имеют внутренных асимптотических параллелей. Край поверхностей составлен из асимптотических параллелей, а полюса поверхностей являются гладкими — непараболическими или параболичаскими, или коническими точками. Доказано, что в S^2_λ (S^1_λ, S^0_λ) существует счетное множество нежестких поверхностей.

Ivanka Ivanova-Karatopraklieva. INFINITESIMAL BENDINGS OF SOME CLASSES OF ROTATIONAL SURFACES WITH MIXED CURVATURE

The infinitesimal bendings of first order of three famillies of rotational surfaces S^2_λ, S^1_λ and S^0_λ (λ is a parameter), with a mixed Gaussian curvature are investigated. The surfaces S^2_λ are doubly connected, S^1_λ — simly connected, S^0_λ — closed, and they haven't any inner asymptotic parallels. The boundary of the surfaces consists of asymptotic parallels and their poles are smooth — nonparabolic or parabolic, or conic points. It is proved that a countable set of nonrigid surfaces exists in S^2_λ (S^1_λ, S^0_λ).

* Эта работа частично финансирована Министерством науки и образования по договору ММ—18, 1991.

1. В этой статье исследуем бесконечно малые (б.м.) изгибания трех однопараметрических семейств регулярных поверхностей вращения знакопеременной гауссовой кривизны — семейство двухсвязных поверхностей S^2_λ, семейство односвязных поверхностей S^1_λ и семейство замкнутых поверхностей S^0_λ. Край рассматриваемых поверхностей составлен из асимптотических параллелей (параболические параллели 2-го и 3-го рода [1]), а полюса поверхностей могут быт как гладкими (параболическими или непараболическими), так и коническими.

Хорошо известно, что замкнутая выпуклая поверхность, как и выпуклая поверхность с краем, составленным из асимптотических линий, является жесткой (см. например [2], [6]). Для невыпуклых поверхностей это не так (полную библиографию об этом можно найти в [3], [5], [7]). Здесь доказываем при помощи метода Кон-Фоссена [1] (см. также [7]), что в любом из трех семействах — S^2_λ, S^1_λ и S^0_λ, существует счетное множество нежестких первого порядка поверхностей.

2. Пусть в плоскости Ouy дана кривая

$$c_\lambda : y = r_\lambda(u),\ r_\lambda(u) = \lambda u^{m_1}(u_0 - u)^{m_2} + \varphi(u), \quad \varphi(u) \geqq 0,$$

(1)
$$r_\lambda(u) > 0 \text{ в } (0, u_0),\ r_\lambda(u) \in C[0, u_0] \cap C^2(0, u_0),$$
$$\lambda = \text{const},\ 0 < \lambda < \infty,\ 1 \geqq m_1, m_2 \geqq 0.$$

Пусть c_λ имеет непрерывную кривизну в $[0, u_0]$ и конечное число точек перегиба $u_1, \ldots, u_p$, $0 < u_1 < \cdots < u_p < u_0$, $p \geqq 1$, отделяющие интервалы выпуклости сверх, где $r''_\lambda(u) \leqq 0$, от интервалов выпуклости вниз, где $r''_\lambda(u) > 0$.

Дополнительно предположим, что c_λ имеет в окрестности $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) представление

(2)
$$u = (y - r_0)^n f_1(y), \quad f_1(r_0) \neq 0,\ f_1(y) \in C^A[r_0, r_0 + \varepsilon),\ r_0 = \text{const} \geqq 0$$

$$(\text{соответственно } u = (y - \bar r_0)^{n'} f_2(y) + u_0, \quad f_2(\bar r_0) \neq 0,\ f_2(y) \in C^A[\bar r_0, \bar r_0 + \varepsilon),$$
$$\bar r_0 = \text{const} \geqq 0).$$

Рассмотрим следующие типы поверхностей, полученых вращением кривой c_λ вокруг оси Ou:

(а) двусвязную поверхность, ограниченную двумя асимптотическими параллелями;

(б) односвязную поверхность с гладким или коническим полюсом и краем — асимптотической параллелью;

(в) замкнутую поверхность рода нуль, любой из двух полюсов которой может быть гладким или коническим.

Из этих предположений непосредственно следует, что : 1) $n \geqq 2$, когда $u = 0$ (соответственно $n' \geqq 2$, когда $u = u_0$) является гладким полюсом или асимптотической параллели; 2) $n = 1$, когда $u = 0$ (соответственно $n' = 1$, когда $u = u_0$) является коническим полюсом; 3) в окрестности $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) c_λ имеет представление

(3)
$$r_\lambda(u) = u^{n_1}\varphi_1(u) + r_0, \quad \varphi_1(0) \neq 0$$

$$(\text{соответственно } r_\lambda(u) = (u_0 - u)^{n_2}\varphi_2(u) + \overline{r}_0,\ \varphi_2(u_0) \neq 0)$$

притом $0 < n_1,\ n_2 \leqq \frac{1}{2}$, когда $u = 0$ и $u = u_0$ являются гладкими полюсами или асимптотическими параллелями, и $n_1 = n_2 = 1$, когда $u = 0$ и $u = u_0$ — коническими полюсами; 4) если $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) является полюсом поверхности, то $r_0 = 0$ (соответственно $\overline{r}_0 = 0$).

Отметим, что правые части равенства (2) и (3) зависят от параметра λ, но для простоты это явно не написано.

Напомним, что во всех рассматриваемых случаях (кроме случая конического полюса) касательная к c_λ в $u = 0$ и $u = u_0$ перпендикулярна оси вращения. Притом: если $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) полюс, то при $n = 2$ (соответственно $n' = 2$) он является непараболической точки повехности, а при $n > 2$ (соответственно $n' > 2$) — параболической точки поверхности, а следовательно и точки уплощения и $n - 2$ (соответственно $n' - 2$) — ее порядок уплощения; если $u = 0$ (соответсвенно $u = u_0$) параллель, то при $n = 2$ (соответственно $n' = 2$) она является параболической параллели второго рода, а при $n > 2$ (соответственно $n' > 2$) — параболической паралели третьего рода.

Наконец отметим, что если $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) — конический полюс и в его окрестности функция $\dfrac{r''_\lambda(u)}{r_\lambda(u)}$ непрерывная, то предположение об аналитичности функции $f_1(y)$ (соответственно $f_2(y)$) можно снять (см. [4]).

Обозначим через S^2_λ семейство двухсвязных (соответственно через S^1_λ и S^0_λ семейство односвязных и замкнутых) поверхностей вращения, которые получаются при вращении c_λ вокруг оси Ou, когда параметр λ меняется. Искомое поле б.м. изгибания 1-го порядка U будем предпологать вне полюсов класса C^1 и непрерывным на всей поверхности.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. В семействе двухсвязных поверхностей S^2_λ, $0 < \lambda < \infty$, существует счетное множество нежестких поверхностей.

Теорема 2. В семействе односвязных поверхностей S^1_λ, $0 < \lambda < \infty$, существует счетное множество нежестких поверхностей.

Теорема 3. В семействе замкнутых поверхностей S^0_λ, $0 < \lambda < \infty$, существует счетное множество нежестких поверхностей.

Доказательство теорем 1–3. А. Представим радиус-вектор поверхности S_λ, полученной вращением кривой c_λ вокруг оси Ou, в виде [1]

$$x(u,v) = u.e + r_\lambda(u).a(v), \quad 0 \leqq u \leqq u_0,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi,$$

где e — единичный вектор оси Ou, а $a(v)$ — единичный вектор, перпендикулярный к Ou и повернутый на угол v от оси Oy. Пусть $U_k(u,v)$, $k \geqq 2$, — фундаментальное поле б.м. изгибания первого порядка поверхности S_λ. Тогда [1]

$$U_k(u,v) = r^{ikv}[\varphi_k(u).e + \chi_k(u).a + \psi_k(u).a'] + e^{-ikv}[\overline{\varphi}_k(u).e + \overline{\chi}_k(u).a + \overline{\psi}_k(u).a'],$$

где

$$\begin{aligned}
&\varphi_k'(u) + r_\lambda'(u)\chi_k'(u) = 0, \\
(5) \qquad &\chi_k(u) + ik\psi_k(u) = 0, \\
&ik\varphi_k(u) + r_\lambda'(u)[ik\chi_k(u) - \psi_k(u)] + r_\lambda(u)\psi_k'(u) = 0, \ k \geqq 2.
\end{aligned}$$

Выключая $\psi_k(u)$ из (5), получаем

$$\begin{aligned}
(6) \qquad &\varphi_k'(u) + r_\lambda'(u)\chi_k'(u) = 0, \\
&k^2\varphi_k(u) + (k^2-1)r_\lambda'(u)\chi_k(u) + r_\lambda(u)\chi_k'(u) = 0, \ k \geqq 2,
\end{aligned}$$

откуда видно, что функция $\chi_k(u) \in C^2(0,u_0)$ и следовательно поле $U_k(u,v)$ принадлежит классу C^2 вне $u=0$ и $u=u_0$. Из (6) получаем для $\chi_k(u)$ уравнение

$$(7) \qquad r_\lambda(u)\chi_k''(u) + (k^2-1)r_\lambda''(u)\chi_k(u) = 0, \ k \geqq 2.$$

Пользуя представление (2) меридиана c_λ в окрестности $u=0$ и $u=u_0$, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&u'(y)\varphi_k'(y) + \chi_k'(y) = 0, \\
(5') \qquad &\chi_k(y) + ik\psi_k(y) = 0, \\
&iku'(y)\varphi_k(y) + ik\chi_k(y) - \psi_k(y) + y\psi_k'(y) = 0, \ k \geqq 2,
\end{aligned}$$

и

$$(7') \qquad yu'(y)\chi_k''(y) - yu''(y)\chi_k'(y) - (k^2-1)u''(y)\chi_k(y) = 0, \ k \geqq 2.$$

Из (4) видно, что если $u=0$ (соответственно $u=u_0$) полюс поверхности, то фундаментальное поле $U_k(u,v)$ непрерывно в нем точно тогда, когда $\varphi_k(0) = \chi_k(0) = \psi_k(0) = 0$ (соответственно $\varphi_k(u_0) = \chi_k(u_0) = \psi_k(u_0) = 0$). В случае когда $u=0$ (соответственно $u=u_0$) асимптотическая параллель, из (2) и (5′) видно, что

$$\chi_k(y)\big|_{y=r_0} = \chi_k'(y)\big|_{y=r_0} = 0$$

$$(\text{соответственно } \chi_k(y)\big|_{y=\overline{r}_0} = \chi_k'(y)\big|_{y=\overline{r}_0} = 0).$$

Известно, что каждый неравный тождественно нулю интеграл $\chi_k(u)$, $k \geqq 2$, уравнения (7) дает нетривиальное поле б.м. изгибания поверхности [1]. Таким образом доказательство теорем 1–3 сводится к нахождению те значения параметра λ, для которых уравнение (7) имеет по меньшей мере для одного целого числа $k \geqq 2$ нетривиальное решение $\chi_k(u)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$(8) \qquad \chi_k(0) = \chi_k(u_0) = 0.$$

Уравнение (7) имеет в $u=0$ и $u=u_0$ особенность. Принимая y для независимой переменной в окрестности $u=0$ и $u=u_0$ оно переходит в уравнению (7′). Если $u=0$ полюс поверхности, то уравнение (7′) является классом Фукса (см. например [8]) и имеет в окрестности $u=0$ пару линейно независимых интегралов [4]

$$\begin{aligned}
&\chi_{k,1}(y) = y^{\nu_k(n)+n-1}P_{k,1}(y), \\
(9) \qquad &\chi_{k,2}(y) = y^{1-\nu_k(y)}\left[P_{k,2}(y) + AP_{k,1}(y)y^{2\nu_k(n)+n-2}\ln y\right],
\end{aligned}$$

где $\nu_k(n) = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{n^2+4(k^2-1)(n-1)}+2-n\right]$, $A = \mathrm{const}$ ($A = 0$, когда $2\nu_k+n-2$ не целое число) функции $P_{k,1}(y)$ — аналитические и $P_{k,i}(0) \neq 0$, $i = 1,2$.

Установимся более подробно на случай когда $u = 0$ — асимптотическая параллель поверхности. В виду (2) уравнение (7′) принимает вид

$$\chi_k''(y) - \frac{1}{y-r_0}\overline{A}\chi_k'(y) - \frac{1}{(y-r_0)^2}\overline{B}\chi_k(y) = 0, \tag{10}$$

где

$$\overline{A} = \frac{n(n-1)f_1 + 2n(y-r_0)f_1' + (y-r_0)^2 f_1''}{nf_1 + (y-r_0)f_1'}, \quad \overline{B} = \frac{(k^2-1)(y-r_0)}{y}\overline{A}.$$

Оно тоже является Фуксовым [8] и его характеристическое уравнение $\rho(\rho-1)+\rho a_0+b_0 = 0$, $a_0 = 1-n$, $b_0 = 0$, имеет корни $\rho_1 = n$, $\rho_2 = 0$. Следовательно в окрестности $u = 0$ уравнение (7′) имеет пару линейно независимых интегралов

$$\begin{aligned} &\chi_{k,1}(y) = (y-r_0)^n P_{k,1}(y), \\ &\chi_{k,2}(y) = P_{k,2}(y) + A\chi_{k,1}(y)\ln(y-r_0), \end{aligned} \tag{11}$$

где $A = \mathrm{const}$ ($A = 0$, когда n не целое число), функции $P_{k,i}(y)$ аналитические и $P_{k,i}(r_0) \neq 0$, $i = 1,2$.

Таким образом парой линейно независимых интегралов уравнения (7′) в окрестности $u = 0$ являются функции (9), когда $u = 0$ полюс поверхности, и функции (11), когда $u = 0$ — асимптотическая параллель (аналогично имеем и в окрестности $u = u_0$). Теперь переходя к переменной u, ввиду (3), получаем, что уравнение (7) имеет в окрестности $u = 0$ пару линейно независимых решений

$$\begin{aligned} &\chi_{k,1}(u) = u^{\frac{1}{2}[1+\mu_k(n_1)]}\chi_{k,1}^0(u), \\ &\chi_{k,2}(u) = u^{\frac{1}{2}[1-\mu_k(n_1)]}\chi_{k,2}^0(u), \quad \chi_{k,i}^0(0) \neq 0,\ i = 1,2, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\mu_k(n_1) = \sqrt{1+4n_1(1-n_1)(k^2-1)}$, когда $u = 0$ — полюс поверхности, и

$$\begin{aligned} &\chi_{k,1}(u) = u\chi_{k,1}^0(u), \\ &\chi_{k,2}(u) = \chi_{k,2}^0(u), \quad \chi_{k,i}^0(0) \neq 0,\ i = 1,2, \end{aligned} \tag{13}$$

когда $u = 0$ — асимптотическая параллель (аналогично имеем и в окрестности $u = u_0$). Отсюда видно, что искомое решение $\chi_k(u)$ уравнения (7) надо иметь в окрестности $u = 0$ вид (12_1), когда $u = 0$ — полюс, и вид (13_1), когда $u = 0$ асимптотическая параллель (аналогично и в окрестности $u = u_0$).

Любая поверхность S_λ семейств S_λ^2, S_λ^1, S_λ^0 имеет конечное число поясов гауссовой кривизны $K < 0$ и конечное число поясов с $K \geqq 0$. Притом любой из поясов S_{0u_1} и $S_{u_p u_0}$, получаемых соответственно для $u \in (0, u_1)$ и $u \in (u_p, u_0)$ может иметь $K \geqq 0$ или $K < 0$. Например для поверхностей S^2_λ возможны три случая — когда оба пояса имеют $K \geqq 0$, когда оба имеют $K < 0$, и когда один пояс имеет $K \geqq 0$, а другой $K < 0$. Аналогично имеем и для поверхностей S^1_λ и S^0_λ, но при них разнообразие увеличивается за счет полюсов — любой из них может быть как коническим, так и гладким. На рис. 1, 2, 3 даны случаи когда пояс S_{0u_1} имеет кривизну $K \geqq 0$, а пояс $S_{u_p u_0}$ — $K < 0$.

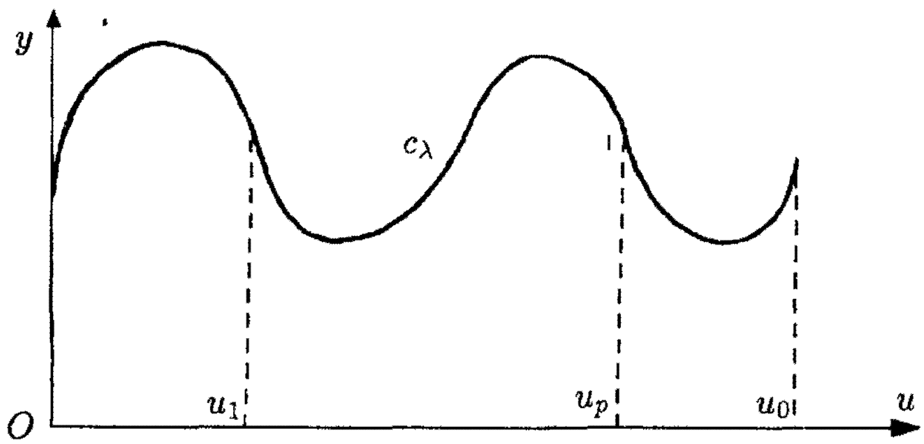

Рис. 1

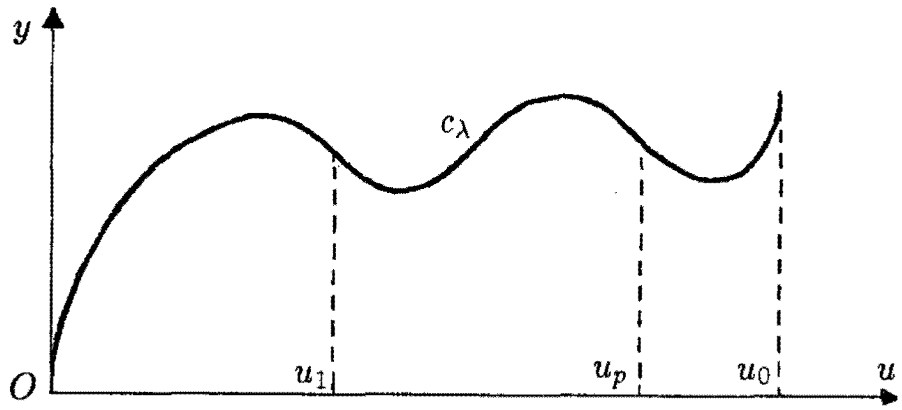

Рис. 2

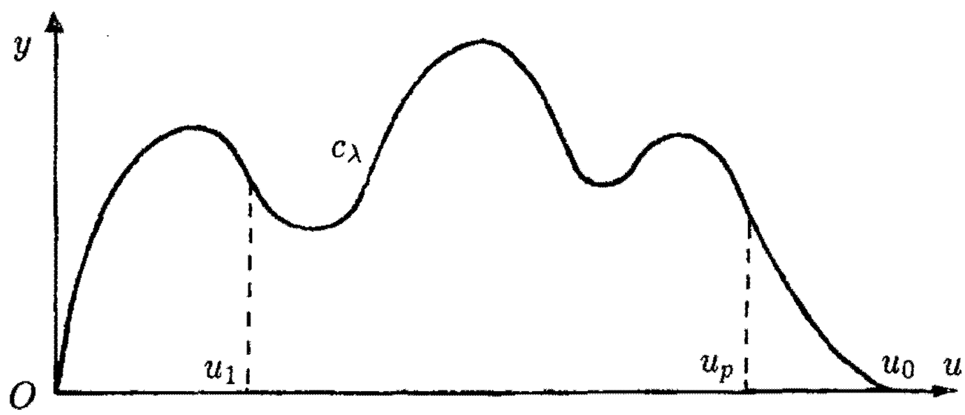

Рис. 3

Пусть $J \subset (0, u_0)$ произвольный интервал, в котором $r''_\lambda(u) > 0$ (соответствующий ему пояс поверхности имеет гауссовую кривизну $K < 0$). Так как $0 \leqq m_1, m_2 \leqq 1$ и

$$r''_\lambda = \lambda m_1(m_1-1)u^{m_1-2}(u_0-u)^{m_2} - 2\lambda m_1 m_2 u^{m_1-1}(u_0-u)^{m_2-1} + \lambda m_2(m_2-1)u^{m_1}(u_0-u)^{m_2-2} + \varphi''(u), \tag{14}$$

то

$$\varphi''(u) > 0 \quad \text{для} \quad u \in J. \tag{15}$$

Напишем уравнение (7) в виде

$$\chi''_k(u) + G_k(u,\lambda)\chi_k(u) = 0, \quad u \in (0, u_0), \tag{16}$$

где

$$G_k(u,\lambda) = \frac{(k^2-1)r''_\lambda(u)}{r_\lambda(u)}. \tag{16'}$$

Пусть $k \geqq 2$ и $u \in J$ фиксированы. Тогда из (14) и (15) получаем

$$\frac{dG_k(u,\lambda)}{d\lambda} = \frac{k^2-1}{r_\lambda^2}\Big\{\varphi(u)\Big[m_1(m_1-1)u^{m_1-2}(u_0-u)^{m_2} \tag{17}$$

$$-2m_1m_2u^{m_1-1}(u_0-u)^{m_2-1} + m_2(m_2-1)u_1^{m}(u_0-u)^{m_2-2}\Big] - u^{m_1}(u_0-u)^{m_2}\varphi''(u)\Big\} < 0.$$

Следовательно $G_k(u,\lambda)$ убывает когда $k \geqq 2$ и $u \in J$ фиксированы.

Точки перегиба мередиана c_λ могут не зависят от λ, могут и зависят. Из (14) и (15) видно, что в последном случае, если u_i и u_{i+1} две соседные точки перегиба и $r''_\lambda(u) > 0$ в (u_i, u_{i+1}), т. е. соответсвующая дуга мередиана выпукла, то когда λ увеличивается u_i передвигивается направо, а u_{i+1} — налево. Следовательно, когда λ увеличивается, любой интервал выпуклости сжимается (притом оба его края передвигиваются к внутренности интервала пока не слеются), а любой интервал вогнутости расширяется.

Б. Рассмотрим сначала случай когда $p = 1$, т. е. когда меридиан c_λ имеет одну точку перегиба (см. рис. 4–6). Притом подробно докажем только теорему 1 (доказательство теорем 2 и 3 аналогично).

Теперь поверхность S_λ двухсвязная (см. рис. 4). Меридиан c_λ имеет в окрестности $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) представление (3) и $r''_\lambda(u) \leqq 0$ в $[0, u_1]$, $r''_\lambda(u) > 0$ в (u_1, u_0). Отметим, что любое решение уравнения (7) в $[0, u_1]$ неколебающее и его графика обращена выпуклостью к оси Ou.

Пусть параметр λ зафиксирован, т. е. $\lambda = \overline{\lambda}$. Если уравнение (7) с $\lambda = \overline{\lambda}$ имеет при некотором целом $k \geqq 2$ нетривиальное решение $\chi_k(u, \overline{\lambda})$, имеющее в окрестности $u = 0$ и $u = u_0$ соответственно вид (13_1) и

$$\chi_k(u) = (u_0 - u)\tilde{\chi}^0_k(u), \quad \tilde{\chi}^0_k(u_0) \neq 0, \tag{18}$$

то поверхность $S_{\overline{\lambda}}$ нежесткая, так как это решение удовлетворяет краевым условиям (8). Предположим, что уравнение (7) не имеет такого решения,

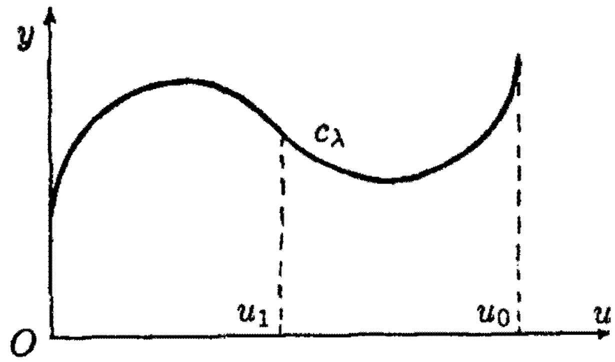

Рис. 4

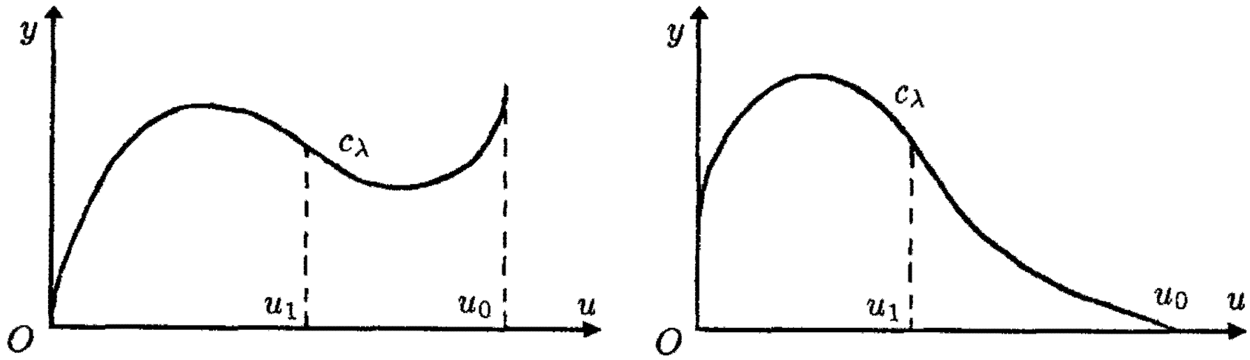

Рис. 5

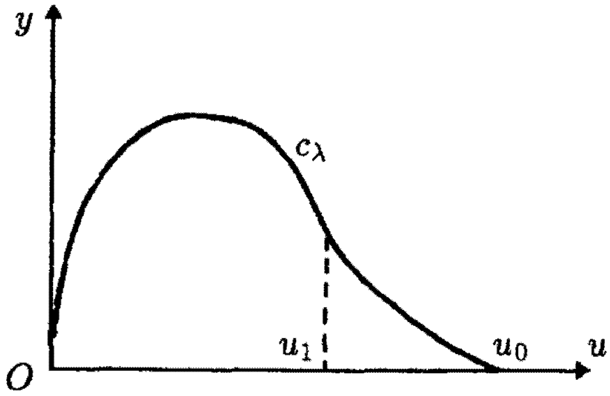

Рис. 6

т. е. что поверхность $S_{\overline{\lambda}}$ жестка. Пусть $N \geqq 3$ произвольное число и $\overline{u}_1$, $\overline{u}_0$ такие, что $u_1 < \overline{u}_1 < \overline{u}_0 < u_0$. Будем сравнивать в $J = [\overline{u}_1, \overline{u}_0]$ решения уравнений (7), т. е. (16), и

(19) $$Y''(u) + \mu^2 Y(u) = 0.$$

Имеем

(20) $$\min_{\overline{u}_1 \leqq u \leqq \overline{u}_0} G_k(u, \overline{\lambda}) = \min_{\overline{u}_1 \leqq u \leqq \overline{u}_0} \frac{(k^2-1) r''_{\lambda}(u)}{r_{\lambda}(u)} \geqq \frac{(k^2-1) m(\overline{\lambda})}{M(\overline{\lambda})},$$

где $m(\overline{\lambda}) = \min r''_{\overline{\lambda}}(u)$, $M(\overline{\lambda}) = \max r_{\overline{\lambda}}(u)$, когда $u \in [\overline{u}_1, \overline{u}_0]$. Выберем k_0 так, что

$$(21)\qquad \frac{(k^2-1)m(\overline{\lambda})}{M(\overline{\lambda})} > \left(\frac{N\Pi}{\overline{u}_0-\overline{u}_1}\right)^2.$$

Поскольку интеграл

$$(22)\qquad Y = \sin\mu(u-\overline{u}_1)$$

уравнения (19) при $\mu = \dfrac{N\Pi}{\overline{u}_0-\overline{u}_1}$ имеет $N+1$ нулей в $J = [\overline{u}_1, \overline{u}_0]$ и в виду (20) и (21) $G_k(u,\overline{\lambda}) > \mu^2$ в $J = [\overline{u}_1, \overline{u}_0]$, то из теоремы Штурма (см. например [8]) следует, что любой интеграл уравнения (7) будет иметь $M_k \geqq N \geqq 3$ нулей в $J = [\overline{u}_1, \overline{u}_0]$.

Пусть $\overline{k} \geqq k_0$ фиксировано. Тогда любое решение $\chi_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ уравнения (7) имеет в (u_1, u_0) не менее 3 нулей. Пусть $\chi^1_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ интеграл уравнения (7), имеющий вид (13_1) в окрестности $u=0$, где $\chi^0_{\overline{k},1}(0) > 0$. Обозначим его нули в $[0,u_0]$ через $\overline{\alpha}_i$, $i = 1,\dots,\overline{M}+1$. Тогда $\chi^1_{\overline{k}}(0,\overline{\lambda}) = 0$, т. е. $\alpha_1 = 0$, $\chi^1_{\overline{k}}(0,\overline{\lambda}) > 0$ в $(0,u_1]$ и $u_1 < \overline{\alpha}_2 < \overline{\alpha}_3 < \dots < \overline{\alpha}_{\overline{M}+1} < u_0$, где $\overline{M} \geqq 3$ (см. рис. 7). Пусть $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ интеграл уравнения (7), имеющий вид (18) в окрестности $u = u_0$ и обозначим его нули в $[0,u_0]$ через $\overline{\beta}_i$, $\overline{\beta}_{i+1} < \overline{\beta}_i$. Тогда $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda}) = 0$, т. е. $\overline{\beta}_1 = u_0$. Поскольку поверхность $S^2_{\overline{\lambda}}$ жестка, то $\chi^1_{\overline{k}}(u_0,\overline{\lambda}) \neq 0$, $\chi^2_{\overline{k}}(0,\overline{\lambda}) \neq 0$.

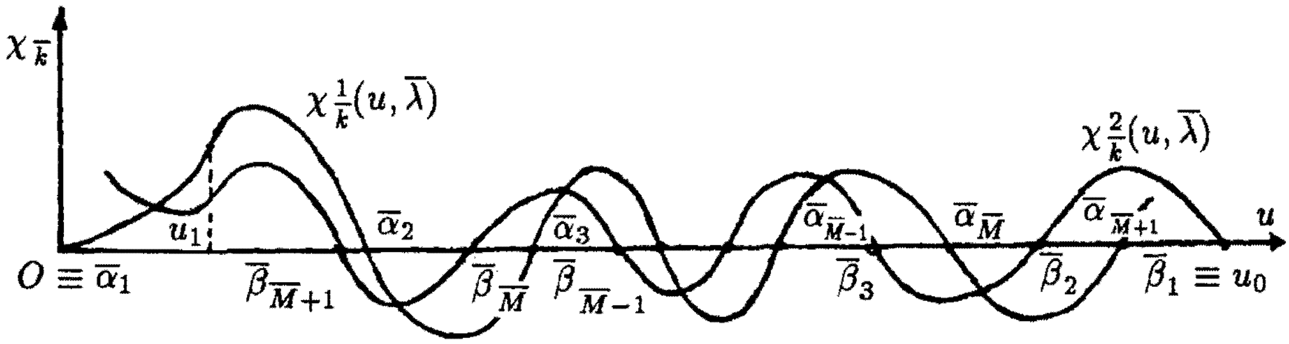

Рис. 7

Имеют место

Лемма 1. Нули решения $\chi^1_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ в $[0,u_0]$ чередуются.

Лемма 2. Если параметр $\lambda \geqq \overline{\lambda}$ увеличивается, то нули решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ в (u_1,u_0) передвигаются налево.

Доказательство этих лемм дадим в п. 4. Здесь отметим, что согласно лемме 1 имеем (см. рис. 7)

$$0 = \overline{\alpha}_1 < \overline{\beta}_{\overline{M}+1} < \overline{\alpha}_2 < \overline{\beta}_{\overline{M}} < \overline{\alpha}_3 < \overline{\beta}_{\overline{M}-1} < \overline{\alpha}_4 < \dots$$
$$< \overline{\beta}_3 < \overline{\alpha}_{\overline{M}} < \overline{\beta}_2 < \overline{\alpha}_{\overline{M}+1} < \overline{\beta}_1 = u_0.$$

Отметим еще, что нули любого решения $\chi_{\overline{k}}(u,\lambda)$ уравнения (7) в $(0,u_0)$ непрерывно зависят от λ, так как функция $G_{\overline{k}}(u,\lambda)$ зависит непрерывно от λ (см. например [9], стр. 61). Поэтому тогда параметр λ увеличивается непрерывно, нули решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ в (u_1,u_0) непрерывно передвигаются налево. Притом расстояние между любыми двумя последовательными нулями любого решения $\chi_{\overline{k}}(u,\lambda)$ уравнения (7) в $[u_1,\overline{u}_0]$ больше или равно $\dfrac{\Pi}{\tilde{M}(\lambda)}$ [8], где в виду (17) функция $\tilde{M}^2(\lambda) = \max\limits_{u_1 \leqq u \leqq \overline{u_0}} G_{\overline{k}}(u,\lambda)$ убывающая.

Рассмотрим сначала случай, когда точка перегиба u_1 не зависит от λ (см. [3]). Теперь имеем $m_1 = m_2 = 0$, т. е. $r_\lambda = \lambda + \varphi(u)$, и следовательно u_1 одна и та же для всех $\lambda \in (0,\infty)$.

Увеличим λ от $\overline{\lambda}$ до $\overline{\overline{\lambda}}$, где $\overline{\overline{\lambda}}$ такое, что

$$\max_{u_1 \leqq u \leqq \overline{\beta}_{\overline{M}-1}} G_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}}) < \frac{\Pi^2}{(\overline{\beta}_{\overline{M}-1} - u_1)^2}. \tag{23}$$

Обозначим нули решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}})$ в $[u_1,u_0]$ через $\overline{\overline{\beta}}_j$, $j = 1,\ldots,\overline{\overline{M}}+1$, $\overline{\overline{\beta}}_{\overline{\overline{M}}+1} < \overline{\overline{\beta}}_{\overline{\overline{M}}} < \overline{\overline{\beta}}_{\overline{\overline{M}}-1} < \cdots < \overline{\overline{\beta}}_2 < \overline{\overline{\beta}}_1 = \overline{\beta}_1 = u_0$. Так как $G_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}}) < G_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ в (u_1,u_0) и $G_{\overline{k}}(u_1,\overline{\overline{\lambda}}) = G_{\overline{k}}(u_1,\overline{\lambda})$, то $\overline{\overline{\beta}}_j$ левее $\overline{\beta}_j$, $j = 2,\ldots,\overline{\overline{M}}+1$, и расстояние между любыми двумя последовательными нулями решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}})$ в $[u_1,\overline{u}_0]$ больше или равно $\dfrac{\Pi}{\tilde{M}\left(\overline{\overline{\lambda}}\right)}$, где $\tilde{M}^2\left(\overline{\overline{\lambda}}\right) = \max\limits_{u_1 \leqq u \leqq \overline{u}_0} G_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}}) < \tilde{M}^2(\overline{\lambda})$.

Притом $\overline{\overline{M}} \leqq \overline{M}$ так как нули $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ в $(u_1,u_0]$ либо $\overline{M}$ (это имеется когда $\overline{\beta}_{\overline{M}+1} \in (0,u_1]$), либо $\overline{M}+1$ (это имеется, когда $\overline{\beta}_{\overline{M}+1} \in (u_1,u_0]$).

Покажем, что $\overline{\overline{M}} \leqq \overline{M}-2$. Допустим, что $\overline{\overline{M}} = \overline{M}-1$. Тогда $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}})$ будет иметь нули $\overline{\overline{\beta}}_{\overline{M}}$ и $\overline{\overline{\beta}}_{\overline{M}-1}$ в $[u_1,\overline{\beta}_{\overline{M}-1})$. Притом $\overline{\overline{\beta}}_{\overline{M}} \not\equiv \overline{\overline{\beta}}_{\overline{M}-1}$ так как $\overline{\overline{\beta}}_{\overline{\overline{M}}-1} - \overline{\overline{\beta}}_{\overline{\overline{M}}} \geqq \dfrac{\Pi}{\tilde{M}(\overline{\overline{\lambda}})}$. Рассмотрим теперь уравнение (19) при $\mu = \dfrac{\Pi}{\overline{\beta}_{\overline{M}-1} - u_1}$. В виду (23) его решение $Y = \sin\mu(u-u_1)$ должно иметь нуль в $(\overline{\overline{\beta}}_{\overline{M}},\overline{\overline{\beta}}_{\overline{M}-1}) \subset (u_1,\overline{\beta}_{\overline{M}-1})$. Но это невозможно, поскольку $u = u_1$ и $u = \overline{\beta}_{\overline{M}-1}$ его последовательные нули. Аналогичным способом получаем, что случай $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ тоже невозможен. Следовательно $\overline{\overline{M}} \leqq \overline{M}-2$, т. е. $\overline{\overline{M}}+1 \leqq \overline{M}-1$, и разница между число нулей $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}})$ и число нулей $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ в $[u_1,u_0]$ будет $\overline{M} - \left(\overline{\overline{M}}+1\right) \geqq 1$, когда $\overline{\beta}_{\overline{M}+1} \in [0,u_1)$, и $\overline{M}+1-\left(\overline{\overline{M}}+1\right) = 2$, когда $\overline{\beta}_{\overline{M}+1} \in [u_1,u_0]$. В виду того, что при непрерывном изменении параметра λ от $\overline{\lambda}$ до $\overline{\overline{\lambda}}$ нули β_i, $i = 2,\ldots,\overline{M}$, решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ непрерывно передвигаются налево и расстояние между любыми двумя последовательными нулями больше или равно $\dfrac{\text{П}}{\tilde{M}(\lambda)}$, где $\tilde{M}(\lambda)$ убывающая функция параметра λ, то следует, что и в обах случаях по меньшей мере нуль $\beta_{\overline{M}} \in [u_1, u_0]$, т. е. $\beta_{\overline{M}}$ перешел через точку $u = u_1$. Непрерывно передвигаясь налево нуль $\beta_{\overline{M}}$ сначала встретит α_2, а потом u_1 поскольку α_2 всегда больше u_1 ($\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda)$ имеет в $[0,u_1]$ только нуль $\alpha_1 = 0$). Тогда существует $\lambda_1 \in [\overline{\lambda}, \overline{\overline{\lambda}}]$, такое, что нуль $\beta_{\overline{M}}(\lambda_1)$ решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$ совпадает с нулем $\alpha_2(\lambda_1)$ решения $\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$. Следовательно решения $\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$ линейно зависимые в $(0,u_0)$, т. е.

$$\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda_1) = c\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda_1), \quad u \in (0,u_0),\ c = \mathrm{const}.$$

Отсюда граничным переходом при $u \to 0$ и $u \to u_0$ получаем $\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda_1) = c\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$ для $u \in [0,u_0]$ (см. рис. 8), т. е. $\chi^1_{\overline{k}}(u_0,\lambda_1) = 0$, $\chi^2_{\overline{k}}(0,\lambda_1) = 0$. Таким образом решение $\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$ уравнения (7) определяет нетривиальное поле $U_{\overline{k}}(u,v,\lambda_1)$ б.м. изгибания поверхности $S^2_{\lambda_1}$ и следовательно она нежестка.

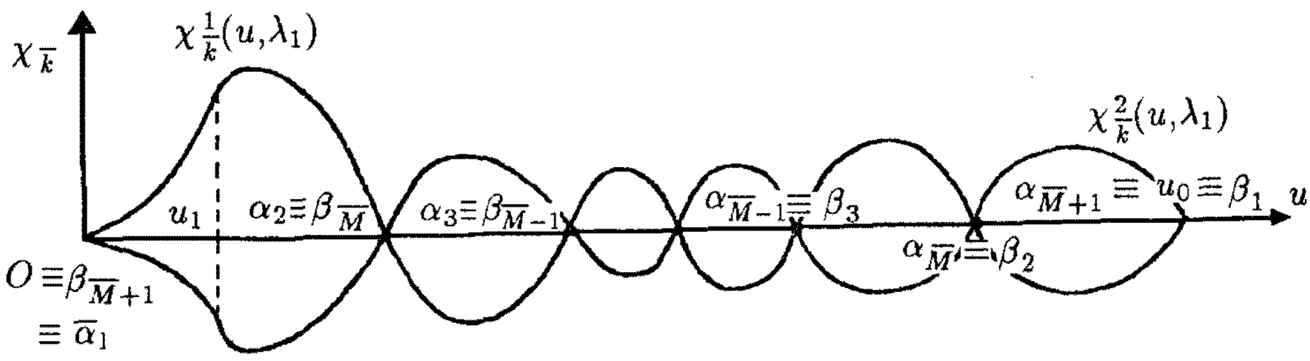

Рис. 8

Продолжая увеличивать параметр λ найдем такое $\lambda = \lambda_2$ для которого нуль $\beta_{\overline{M}-1}(\lambda_2)$ решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda_2)$ совпадает с нулем $\alpha_2(\lambda_2)$ решения $\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda_2)$ и следовательно поверхность $S^2_{\lambda_2}$ будет нежесткой. Этот процес можно продолжить пока в (u_1,u_0) останется только нуль β_2 решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ (см. рис. 9, где даны графики функции $\beta_{\overline{M}+1}(\lambda)$, $\beta_{\overline{M}}(\lambda)$, $\beta_{\overline{M}-1}(\lambda)$, $\beta_{\overline{M}-2}(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$, $\alpha_3(\lambda)$, $\alpha_4(\lambda)$).

Пусть теперь точка перегиба u_1 зависит от λ. При непрерывном увеличении параметра λ нули решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ непрерывно передвигаются налево, а точка перегиба $u_1(\lambda)$ — направо. Из равенства (14) видно, что u_1 совпадает с $\overline{\beta_{\overline{M}}}$ при $\tilde{\lambda} = -\varphi''\left(\overline{\beta}_{\overline{M}}\right)/Q\left(\overline{\beta}_{\overline{M}}\right)$ где

$$Q\left(\overline{\beta}_{\overline{M}}\right) = m_1(m_1-1)\overline{\beta}_{\overline{M}}^{m_1-2}\left(u_0 - \overline{\beta}_{\overline{M}}\right)^{m_2} - 2m_1m_2\overline{\beta}_{\overline{M}}^{m_1-1}\left(u_0 - \overline{\beta}_{\overline{M}}\right)^{m_2-1}$$
$$- m_2(m_2-1)\overline{\beta}_{\overline{M}}^{m_1}\left(u_0 - \overline{\beta}_{\overline{M}}\right)^{m_2-2}.$$

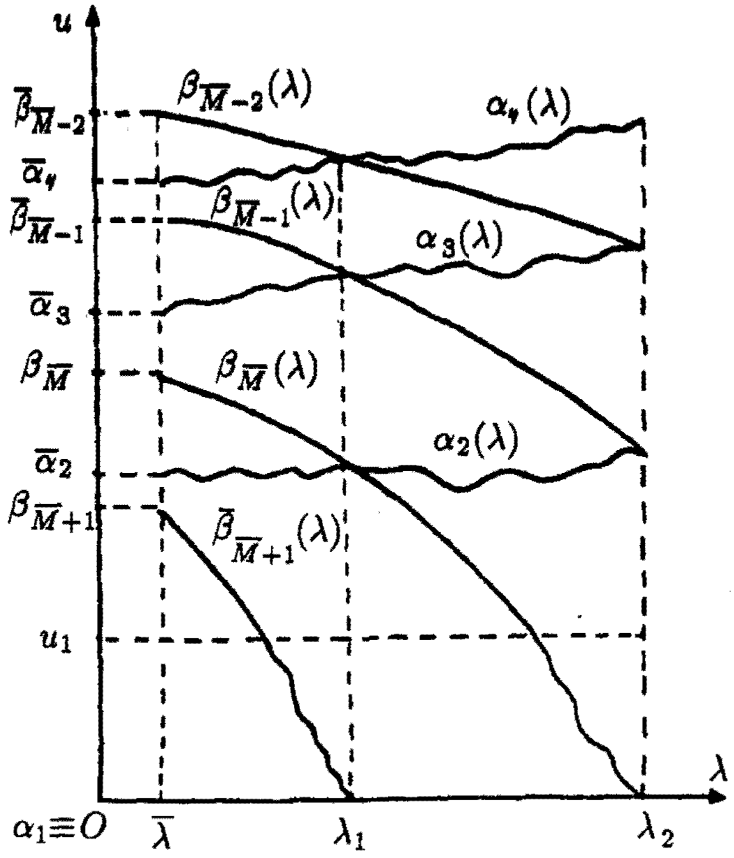

Рис. 9

Первая нежесткая поверхность $S^2_{\lambda_1}$ получится для того $\lambda_1 \in (\overline{\lambda}, \tilde{\lambda})$, для которого $\beta_{\overline{M}}(\lambda_1) \equiv \alpha_2(\lambda_1)$, вторая $S^2_{\lambda_2}$ — для того $\lambda_2 > \lambda_1$, для которого $\beta_{\overline{M}-1}(\lambda_2) = \alpha_2(\lambda_2)$. Увеличивая λ пока точка перегиба u_1 совпаднет с $\overline{\beta_2}$ получим последовательно нежесткие поверхности $S^2_{\lambda_3}, \ldots, S^2_{\lambda_{\overline{M}-1}}$.

Множество нежестких поверхностей в семействе S^2_λ счетное, поскольку любой интеграл $\chi^2_k(u,\lambda)$ уравнения (7) имеет конечное число нулей в $[u_1, u_0]$, а k принимает все целие значения больше 1.

В. Теперь рассмотрим случай, когда меридиан c_λ имеет $p > 1$ точек перегиба. Докажем опять только теорему 1 — притом сначала предположим, что точки перегиба не меняются.

а) Пусть пояс S_{0u_1} поверхности S^2_λ имеет гауссовую кривизну $K \geqq 0$, а пояс $S_{u_p u_0}$ имеет $K < 0$. Тогда $r''_\lambda(u) > 0$ в (u_i, u_{i+1}), $i = 1, 3, \ldots, p$ (i — нечетное, $u_{p+1} \equiv u_0$). Пусть $\lambda = \overline{\lambda}$ фиксировано и поверхность $S^2_{\overline{\lambda}}$ жесткая. Выберем целое число k^i_0 так, что любой интеграл $\chi_{k^i_0}(u, \overline{\lambda})$ уравнения (7) имел бы N_i нулей в $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 1, 3, \ldots, p$, притом $N_1 \geqq 3$, $N_p \geqq 3$, $N_l \geqq 2$, $l = 3, \ldots, p-2$ (l — нечетное). Обоснование существования такого числа k^i_0 приводится таким образом как в пункте **Б**. Фиксируем целое число $\overline{k} > k_0 = \max(k^1_0, k^3_0, \ldots, k^p_0)$. Пусть $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ интеграл уравнения (7), имеющий вид (13₁) в окрестности u_0, а $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ — интеграл уравнения (7), имеющий вид (18) в окрестности $u = u_0$. Обозначим в $[u_i, u_{i+1}]$ нули интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ через $\overline{\alpha}^i_1, \overline{\alpha}^i_2, \ldots, \overline{\alpha}^i_{\overline{M}_i}$, $\overline{\alpha}^i_1 < \overline{\alpha}^i_2 < \cdots < \overline{\alpha}^i_{\overline{M}_i}$, а нули $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$

через $\overline{\beta}_1^i, \overline{\beta}_2^i, \ldots, \overline{\beta}_{\overline{N}_i}^i$, $\overline{\beta}_1^i > \overline{\beta}_2^i > \cdots > \overline{\beta}_{\overline{N}_i}^i$, $i = 1, 3, \ldots, p$. Имеем $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i \geqq N_i$ и $0 \leqq |\overline{M}_i - \overline{N}_i| \leqq 1$, $i = 1, 3, \ldots, p$, так как согласно лемме 1 нули интегралов $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ чередуются. Кроме этого согласно лемме 2 нули любого интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u, \lambda)$ в (u_p, u_0) передвигаются налево. Рассмотрим интеграл $y = \sin \mu(u - u_p)$ уравнения (19) при

$$\mu = \frac{(\overline{N}_p - 2)\Pi}{\overline{\beta}_2^p - u_p}. \tag{24}$$

Он имеет $\overline{N}_p - 1$ нулей в $[u_p, \overline{\beta}_2^p]$. Увеличим λ от $\overline{\lambda}$ до $\overline{\lambda}^p$, где $\overline{\lambda}^p$ такого, что

$$\max_{u_p \leqq u \leqq \overline{\beta}_2^p} G_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^p) < \mu^2 = \frac{(\overline{N}_p - 2)^2 \Pi^2}{(\overline{\beta}_2^p - u_p)^2}. \tag{25}$$

Тогда интеграл $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^p)$ уравнения (7) при $\lambda = \overline{\lambda}^p$ будет иметь $\overline{N}'_p$ нулей в $[u_p, u_0]$, где $\overline{N}'_p \leqq \overline{N}_p - 1$. В самом деле, если допустим, что $\overline{N}'_p > \overline{N}_p - 1$, то $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^p)$ будет иметь $\overline{N}'_p - 1 > \overline{N}_p - 2$ нулей $\overline{\overline{\beta}}_2^p, \ldots, \overline{\overline{\beta}}_{\overline{N}'_p - 1}^p$, $\overline{\overline{\beta}}_2^p < \overline{\beta}_2^p$, в $[u_p, \overline{\beta}_2^p]$, а интеграл $y = \sin \mu(u - u_p)$ уравнения (19) в виду (25) должен иметь там по меньшей мере $\overline{N}'_p > \overline{N}_p - 1$ нулей. Но это невозможно, поскольку в виду (24) интеграл $y = \sin \mu(u - u_p)$ имеет там $\overline{N}_p - 1$ нулей.

Пусть теперь

$$\mu = \frac{(\overline{N}_{p-2} - 1)\Pi}{u_{p-1} - u_{p-2}} \tag{26}$$

и $\lambda = \overline{\lambda}^{p-2} \geqq \overline{\lambda}^p$ такого, что

$$\max_{u_{p-2} \leqq u \leqq u_{p-1}} G_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^{p-2}) < \mu^2 = \frac{(\overline{N}_{p-2} - 1)^2 \Pi^2}{(u_{p-1} - u_{p-2})^2}. \tag{27}$$

Сравниваем интеграл $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^{p-2})$ уравнения (7) и интеграл $y = \sin \mu(u - u_{p-1})$ уравнения (19) при условиях (26) и (27). Получаем, что $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^{p-2})$ имеет $\overline{N}'_{p-2} \leqq \overline{N}_{p-2} - 1$ нулей в $[u_{p-2}, u_{p-1}]$. Поступая аналогичним образом и для следующих интегралов, получаем для λ соответственно значения $\overline{\lambda}^3 \geqq \overline{\lambda}^5 \geqq \ldots \geqq \overline{\lambda}^{p-2} \geqq \overline{\lambda}^p$. Наконец для интервала $[u_1, u_2]$ выберем $\mu = \dfrac{(\overline{N}_1 - 2)\Pi}{u_2 - u_1}$ и $\lambda = \overline{\lambda}^1 \geqq \overline{\lambda}^3$, так, что

$$\max_{u_1 \leqq u \leqq u_2} G_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^1) < \mu^2 = \frac{(\overline{N}_1 - 2)^2 \Pi^2}{(u_2 - u_1)^2}.$$

Очевидно, что интеграл $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^1)$ уравнения (7) имеет в $[u_1, u_2]$ по меньшей мере два нуля меньше, чем $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$, а в $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 3, 5, \ldots, p$, по меньшей мере на единицу меньше.

Окончательно получаем, что при увеличении параметра λ от $\overline{\lambda}$ до $\overline{\lambda}^1$ из $\bigcup_{i=1}^{p}[u_i, u_{i+1}]$ (i — нечетное) изчезли по меньшей мере $\frac{p+1}{2}+1$ нулей интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$. Притом расстояние между любыми двумя соседными нулями β^i_j и β^i_{j+1} больше или равно $\frac{\Pi}{\tilde{M}^i(\lambda)}$, где $(\tilde{M}^i(\lambda))^2 = \max\limits_{u_i \leqq u \leqq u_{i+1}} G_{\overline{k}}(u,\lambda)$ и $\tilde{M}^i(\lambda)$ убывающая функция, $i = 1, 3, \ldots, p$. С другой стороны в любом из интервалов (u_2, u_3), (u_4, u_5), $\ldots$, (u_{p-1}, u_p) интеграл $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}})$ может иметь не больше одного нуля. Поскольку число этих интервалов на два меньше минимального числа исчезнувших нулей и $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ имеет в $[0, u_1]$ только нуль $u = 0$, то следует, что когда λ увеличивалась от $\overline{\lambda}$ до $\overline{\lambda}^1$, по меньшей мере один из нулей интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ в $[u_1, u_2]$ перешел через нуль α^1_1 интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda)$. Тогда для некоторого $\lambda_1 \in (\overline{\lambda}, \overline{\lambda}^1)$ нули интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$ и нули интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$ совпадают и следовательно соответствующая поверхность $S^2_{\lambda_1}$ будет нежестка.

Продолжая увеличивать параметр λ получим нежесткие поверхности $S^2_{\lambda_2}$, $S^2_{\lambda_3}$ и т. д. Очевидно, при фиксированном $\overline{k}$ можем увеличивать λ пока в некотором из интервалов $[u_3, u_4]$, $[u_5, u_6]$, $\ldots$, $[u_{p-2}, u_{p-1}]$ останутся меньше 2 нуля или в некотором из интервалов $[u_1, u_2]$, $[u_p, u_0]$ останутся меньше 3 нуля интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$.

б) Пусть пояса S_{0u_1} и $S_{u_p u_0}$ поверхности S^2_λ имеют $K \geqq 0$. Теперь $r''_\lambda(u) > 0$ в интервалах (u_1, u_2), (u_3, u_4), $\ldots$, (u_{p-1}, u_p) и $r''_\lambda(u) \leqq 0$ в $[0, u_1]$, $[u_2, u_3]$, $\ldots$, $[u_p, u_0]$ (число первых интервалов $\frac{p}{2}$, а вторых — $\frac{p}{2}+1$). Интеграли уравнения (7) не колебаются в $[0, u_1]$, $[u_2, u_3]$, $\ldots$, $[u_p, u_0]$ и любой интеграл $\chi^1_k(u,\lambda)$ имеет в $[0, u_1]$ только нуль $u = 0$, а любой интеграл $\chi^2_k(u,\lambda)$ имеет в $[u_p, u_0]$ только нуль $u = u_0$. Пусть $\overline{k}$ и $\overline{\lambda}$ фиксированы и так выбрани, что $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ имеет в $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 1, 3, \ldots, p-1$ (i — нечетное), $\overline{N}_i$ нулей, где $\overline{N}_1 \geqq 3$, $\overline{N}_l \geqq 2$, $l = 3, \ldots, p-1$. Пусть $\overline{\overline{\lambda}} > \overline{\lambda}$ такого, что число нулей интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\overline{\lambda}})$ меньше число нулей $\chi^2_{\overline{k}}(u,\overline{\lambda})$ по меньшей мере бы на единицу в любом интервале $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 3, 5, \ldots, p-1$, и по меньшей мере на две в $[u_1, u_2]$. Существование таких чисел $\overline{k}$, $\overline{\lambda}$ и $\overline{\overline{\lambda}}$ обосновывается таким же способом как в случае а). Так как при увеличении λ от $\overline{\lambda}$ до $\overline{\overline{\lambda}}$ изчезли по меньшей мере $\frac{p}{2}+1$ нулей интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ из $\bigcup_{i=1}^{p-1}[u_i, u_{i+1}]$ (притом минимальное расстояние между последовательными нулями увеличивалось), а число интервалов $[u_2, u_3]$, $[u_4, u_5]$, $\ldots$, $[u_{p-2}, u_{p-1}]$ — $\frac{p}{2}-1$, то по меньшей мере два нуля решения $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ из $[u_1, u_2]$ перешли через u_1. Тогда для некоторого $\lambda_1 \in (\overline{\lambda}, \overline{\overline{\lambda}})$ имеем $\chi^1_{\overline{k}}(u,\lambda_1) = c\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda_1)$, $c = \mathrm{const}$, и следовательно поверхность $S^2_{\lambda_1}$ нежесткая. Продолжая увеличивать параметр $\lambda > \lambda_1$ получим нежесткие поверхности $S^2_{\lambda_2}$, $S^2_{\lambda_3}$ и т. д.

в) Наконец установимся на случай когда пояси S_{0u_1} и $S_{u_pu_0}$ имеют $K < 0$. Теперь $r''_\lambda(u) > 0$ в интервалах $(0, u_1)$, (u_2, u_3), ..., (u_p, u_0) (число этих интервалов $\frac{p}{2} + 1$). Когда λ растет нули $\chi^1_k(u, \lambda)$ в $(0, u_1)$ передвигиваются направо, нули $\chi^2_k(u, \lambda)$ в (u_p, u_0) передвигиваются налево и кроме этого минимальное расстояние между последовательными нулями в $(0, u_1)$, (u_2, u_3), ..., (u_p, u_0) любого интеграла уравнения (7) увеличивается. Пусть $\overline{k}$ и $\overline{\lambda}$ такие, что $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ имеет по меньшей мере 3 нуля в $[u_p, u_0]$, по меньшей мере 4 нуля в $[u_2, u_3]$ и по меньшей мере 2 нуля в $[u_l, u_{l+1}]$, $l = 4, 6, \ldots, p-2$ (l — четное). Пусть $\lambda = \overline{\overline{\lambda}} > \overline{\lambda}$ такого, что число нулей интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\overline{\lambda}})$ меньше число нулей интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ по меньшей мере на единицу в $[u_r, u_{r+1}]$, $r = 4, 6, \ldots, p$ (r — четное), и по меньшей мере на три в $[u_2, u_3]$. Поскольку в $[0, u_1]$ число нулей интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\overline{\lambda}})$ не превосходит число нулей интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$, нуль $\overline{\overline{\alpha_j}}$ интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\overline{\lambda}})$ в $(0, u_1)$ правее нуля $\overline{\alpha}_j$ интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$, $j > 1$, и нули $\chi^1_{\overline{k}}(u, \lambda)$ разделяют нули $\chi^2_{\overline{k}}(u, \lambda)$ в $[0, u_0]$, то когда λ меняется от $\overline{\lambda}$ до $\overline{\overline{\lambda}}$ ни одного нуля интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u, \lambda)$ из (u_1, u_0) не может перейти в $[0, u_1]$, а в (u_1, u_2) может перейти не больше одного. В то же время по меньшей мере три нуля интеграла $\chi^2_{\overline{k}}[u, \lambda)$ из $[u_2, u_3]$ передвинулись левее u_2. Но когда самый большой нуль $\beta_{\overline{N}_2-2}(\lambda)$ из этих трех нулей интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u, \lambda)$ должен был перейти через u_2, то средный нуль уже должен был находиться левее u_1, а это обозначает, что $\beta_{\overline{N}_2-2}(\lambda)$ заранее совпал при некоторого $\lambda = \lambda_1 \in (\overline{\lambda}, \overline{\overline{\lambda}})$ с предходным ему нулем интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u, \lambda_1)$ (для этого λ_1 конечно совпали все нули оба интеграла). Тогда $\chi^1_{\overline{k}}(0, \lambda_1) = c\chi^2_{\overline{k}}(u, \lambda_1)$ и следовательно поверхность $S^2_{\lambda_1}$ нежесткая. Аналогично получим нежесткие поверхности $S^2_{\lambda_2}$, $S^2_{\lambda_3}$ и т. д.

Если точки перегиба меридиана c_λ зависят от λ, то доказательство можно провести тоже таким же способом. В самом деле в случае а) если обозначим через $u_1, \ldots, u_p$ точки перегиба меридиана при $\lambda = \overline{\lambda}$, то все прежные неравенства опять имеют место, так как $G_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}) \leqq 0$ в интервалах где меридиан выпуклый сверх и при увеличении λ интервалы, где меридиан выпуклый сниз, уменьшаются. Например неравенство (27) переходит в

$$(27') \qquad \max_{u_{p-2}(\overline{\lambda}^{p-2}) \leqq u \leqq u_{p-1}(\overline{\lambda}^{p-2})} G_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^{p-2}) = \max_{u_{p-2} \leqq u \leqq u_{p-1}} G_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}^{p-2})$$

$$< \mu^2 = \frac{(\overline{N}_{p-2} - 1)^2 \Pi^2}{(u_{p-1} - u_{p-2})^2} < \frac{(\overline{N}_{p-2} - 1)^2 \Pi^2}{u_{p-1}(\overline{\lambda}^{p-2}) - u_{p-2}(\overline{\lambda}^{p-2})}.$$

То же самое имеется и в случаях б) и в). Следовательно все прежные рассмотрения можно проделать и теперь.

Счетность нежестких поверхностей в семействе S^2_λ очевидна.

Замечание. В случае, когда точки перегиба меридиана c_λ зависят от λ, утверждения теорем становятся очевидными, так как при увеличении параметра λ интервали, где меридиан выпуклым вниз, уменшаются, а расстояние между любыми двумя соседными нулями там увеличивается. В самом деле (установимся на случай а)) пусть $\overline{\lambda}^p \leqq \cdots \leqq \overline{\lambda}^1$, $\overline{\lambda}^p > \overline{\lambda}$, таковы, что

$$\left|u_{i+1}(\overline{\lambda}^i) - u_i(\overline{\lambda}^i)\right| < \frac{(\overline{N}_i - 1)\Pi}{\tilde{M}^i(\overline{\lambda})}, \quad i = p, \dots, 3,$$

$$\left|u_2(\overline{\lambda}^1) - u_1(\overline{\lambda}^1)\right| < \frac{(\overline{N}_1 - 2)\Pi}{\tilde{M}^1(\overline{\lambda})}$$

(i — нечетное, $u_{p+1} = u_0$). Таким образом при увеличении λ от $\overline{\lambda}$ до $\overline{\lambda}^1$ из $\bigcup\limits_{i=1}^{p}[u_i, u_{i+1}]$ (i — нечетное) изчезли по меньшей мере $\dfrac{p+1}{2} + 1$ нулей интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u, \lambda)$, т. е. мы получили ту же ситуацию как в 3.В.а.

4. Доказательство лемм. Согласно теореме Штурма (см. например [8]) между двумя последовательными нулями в $(0, u_0)$ интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ находится ровно один нуль интеграла $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$. Поэтому чтобы доказать утверждение леммы 1 достаточно показать, что $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ имеет нуль $\overline{\alpha}_{\overline{M}+1} \in (\overline{\beta}_2, \overline{\beta}_1)$ (очевидно $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ не может иметь там больше одного нуля). Допустим, что $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ не имеет нуля в $(\overline{\beta}_2, \overline{\beta}_1)$. Поскольку решения $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ уравнения (7) линейно независимые, то $\chi^1_{\overline{k}}(\overline{\beta}_1, \overline{\lambda}) \neq 0$, $\chi^1_{\overline{k}}(\overline{\beta}_2, \overline{\lambda}) \neq 0$. Тогда функция $f_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}) = \chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})/\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ непрерывна в $[\overline{\beta}_2, \overline{\beta}_1]$. Из $f_{\overline{k}}(\overline{\beta}_1, \overline{\lambda}) = f_{\overline{k}}(\overline{\beta}_2, \overline{\lambda})$ следует, что существует точка $u^0 \in (\beta_2, \beta_1)$ для которой $f'_{\overline{k}}(u^0, \overline{\lambda}) = 0$. Отсюда получаем, что интегралы $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ линейно зависимые в $(0, u_0)$, т. е. $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}) = c\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$, $c = \mathrm{const}$. Переходя к переделу при $u \to 0$ и $u \to u_0$ получаем, что равенство $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda}) = c\chi^2_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ имеет место в $[0, u_0]$, и следовательно $\chi^1_{\overline{k}}(u_0, \overline{\lambda}) = 0$, $\chi^2_{\overline{k}}(0, \overline{\lambda}) = 0$. Так кок это противоречит нашему предположению, то следует, что $\chi^1_{\overline{k}}(u, \overline{\lambda})$ имеет нуль $\overline{\alpha}_{\overline{M}+1} \in (\overline{\beta}_2, \overline{\beta}_1)$.

Чтобы доказать лемму 2 надо показать, что в нашем особом случае имеет место теорема Штурма о сравнении (см. [8], стр. 134).

Пусть $\lambda^1 > \lambda^2 \geqq \overline{\lambda}$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u, \lambda^1)$, $\chi^2_{\overline{k}}(u, \lambda^2)$ интегралы соответственно уравнений

$$\chi''_{\overline{k}}(u) + G_{\overline{k}}(u, \lambda^1)\chi_{\overline{k}}(u) = 0, \tag{28}$$

$$(29) \qquad \chi''_{\overline{k}}(u) + G_{\overline{k}}(u,\lambda^2)\chi_{\overline{k}}(u) = 0,$$

имеющие в окрестности $u = u_0$ вид (18). Поскольку в (u_1, u_0) выполнено неравенство $G_{\overline{k}}(u,\lambda^1) < G_{\overline{k}}(u,\lambda^2)$, то там имеет место теорема Штурма о сравнении. Покажем, что она имеет место и в окрестности особой точки $u = u_0$ уравнений (28) и (29).

Обозначим через β_2^1 и β_2^2 ближайшие нули к β_1 соответственно интегралов $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^1)$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^2)$. Имеем $\beta_2^1 < \beta_1$, $\beta_2^2 < \beta_1$. Надо доказать, что $\beta_2^1 < \beta_2^2$, т. е. что β_2^2 ближе к β_1 чем β_2^1. Будем следовать тот же путь как в [8] (см. стр. 135). Поставим в (28) и (29) соответственно интегралы $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^1)$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^2)$, и умножим первое на $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^2)$, а второе — на $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^1)$. Вычитая одно уравнения из другого получаем тождество

$$(30) \qquad \left[\chi^{2\prime}_{\overline{k}}(u,\lambda^2)\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^1) - \chi^{2\prime}_{\overline{k}}(u,\lambda^1)\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^2)\right]'$$
$$+ \left(G_{\overline{k}}(u,\lambda^2) - G_{\overline{k}}(u,\lambda^1)\right)\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^1)\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^2) = 0.$$

Из (3), (11_1), $(16')$ и (18) непосредственно видно, что оба слагаемые в (30) имеют в $u = u_0$ нуль порядка $n_2 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Допустим, что $\beta_2^2 \leqq \beta_2^1$ (предполагаем, что функции $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^1)$ и $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^2)$ положитеьные в (β_2^1, u_0) — это всегда можно достичь умножая на постоянный множитель). Интегрируя (30) от β_2^1 до u_0 получаем

$$-\chi^{2\prime}_{\overline{k}}(\beta_2^1,\lambda^1)\chi^2_{\overline{k}}(\beta_2^1,\lambda^2) = \int\limits_{\beta_2^1}^{u_0} \left(G_{\overline{k}}(u,\lambda^2) - G_{\overline{k}}(u,\lambda^1)\right)\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^1)\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda^2)\,du.$$

Это равенство несовместимо так как его правая часть положительна, а его левая часть — неположительна. Следовательно $\beta_2^1 < \beta_2^2$. Таким образом получили, что теорема Штурма о сравнений нулей решений уравнений (28) и (29) имеет место и в окрестности особой точки $u = u_0$. Тогда при увеличении параметра λ нули интеграла $\chi^2_{\overline{k}}(u,\lambda)$ уравнения (7) в (u_1, u_0) передвигиваются налево.

Короткое сообщение результатов этой статьи для более узких классов поверхностей S^2_λ, S^1_λ и S^0_λ опубликовоно в [5]. Там $m_1 = m_2 = 0$ для S^2_λ, $m_2 = 0$ и $m_1 = n_1$ для S^1_λ, $m_1 = n_1$ и $m_2 = n_2$ для S^0_λ, где либо $n_i = 1$, либо $n_i \leqq \dfrac{1}{2}$, $i = 1, 2$. Кроме этого б.м. изгибания поверхностей S^2_λ с $m_1 = m_2 = 0$ и S^1_λ с $m_2 = 0$, $m_1 = 1$, меридиан c_λ которых имеет одну инфлексную точку и она не зависит от λ, рассмотрены в [3].

Отметим еще, что все поверхности S^2_λ и S^1_λ, в силу результатов статей [10], [11], [12] являются жесткими второго порядка (о б.м. изгибаниях высших порядков замкнутых поверхностей вращения смешанной кривизны см. в [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. C o h n – V o s s e n, S. Unstarre geschlossene Flachen. — Math. Ann. , **102**, 1929, 10–29.
2. Е ф и м о в, Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. — Успехи мат. наук, **3**, 2, 1948, 47–158.
3. И в а н о в а – К а р а т о п р а к л и е в а, И. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения смешанной кривизны. — Сердика, **1**, 1975, 3–4, 346–355.
4. И в а н о в а – К а р а т о п р а к л и е в а, И. Върху някои свойства на полето на безкрайно малко огъване на ротационни повърхнини. — Год. на Соф. у-т, Фак. по мат. и мех. , **76**, 1982, 21–40.
5. И в а н о в а – К а р а т о п р а к л и е в а, И. Нежесткость некоторых классов поверхностей вращения смешанной кривизны. — Докл. БАН, **37**, 5, 1984, 569–572.
6. И в а н о в а – К а р а т о п р а к л и е в а, И., И. Х. С а б и т о в. Изгибание поверхностей I. Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, ВИНИТИ, **23**, 1991, 131–184.
7. И в а н о в а – К а р а т о п р а к л и е в а, И., И. Х. С а б и т о в. Изгибание поверхностей II. Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, ВИНИТИ, **24**, 1992.
8. Т р и к о м и, Ф. Дифференциальные уравнения. Москва, 1962.
9. B o c h e r, M. Leçons sur les méthodes de Sturm. Paris, 1917.
10. С а б и т о в, И. Х. О бесконечно малых изгибаниях желобов вращения 1. — Матем. сборник, **98**(140), 1, 1975, 113–129.
11. С а б и т о в, И. Х. О бесконечно малых изгибаниях желобов вращения 2. — Матем. сборник, 99, 1, 1976, 49–57.
12. M i n a g a v a, T., T. R a d o. On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. — Math. Zeitschr., **59**, 1953, 151–163.
13. I v a n o v a – K a r a t o r a k l i e v a, I. Infinitesimal bendings of higher orther of rotational surfaces. — Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, **43**, 12, 1990, 13–16.

Поступила 22.06.1992