ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 87, 1993

MOUVEMENT AVEC FROTTEMENT D'UNE SPHERE HOMOGENE DANS UN CYLINDRE HORIZONTAL

SONIA DENEVA

Соня Денева. КАЧЕНИЕ ШАРА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ЦИЛИНДРУ

В работе рассматривается задача о движении однородного шара по горизонтальному неподвижному цилиндру под действием сили трения.

Sonia Deneva. MOVEMENT OF A ROLLING SPHERE ON A HORIZONTAL CYLINDER

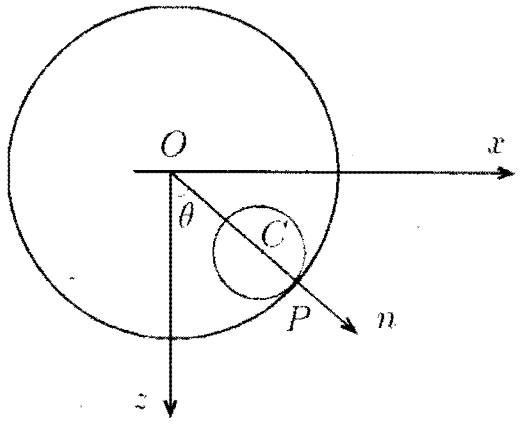
Some aspects of the classical problem about rolling sphere on a homogeneous horizontal cylinder are considered in this paper.

Le mouvement d'une sphère dans un cylindre horizontal immobile est un problème classique que nous considerons ayant vu la force du frottement entre deux corps selon la loi de Coulon. Pour simplification du problème nous supposons que la force du frottement est située dans un plan perpendiculaire de l'axe du cylindre.

Par ailleurs nous montrons comment calculer la chaleur qui se sépare par suite du frottement ayant vu que le travail et la puissance de la force du frottement sont equvalents à l'énergie thermique.

Le cylindre est circulaire de rayon R; la sphère de centre C, de masse m et de rayon r se roule sur la part inférieur du cylindre. La section verticale du cylindre et de la sphère est representée au dess. 1; ici P est le point de contacte de deux corps. Nous introduisons l'angle $\theta = (\widehat{Oz, OP})$ qui determine la position du point P. Le vecteur unique n qui est normal à deux surfaces s'exprime par la formule

$$n = \sin\theta\, i + \cos\theta\, k, \tag{1}$$



Dess. 1

où i, j, k sont orts de système $Oxyz$ (l'axe Oy détermine la direction de l'axe du cylindre). Le vecteur unique t qui est tangentiel à la section normal du cylindre s'exprime par la formule

$$t = -\cos\theta\, i + \sin\theta\, k. \tag{2}$$

Evidement t est à sens du mouvement du point P. La vitesse du glissement de P s'exprime par la formule

$$v_P = v(-\cos\theta\, i + \sin\theta\, k), \tag{3}$$

où v est la grandeur de la vitesse.

Selon la loi de Coulon la force du frottement est

$$T = fR_n(\cos\theta . i - \sin\theta\, k), \tag{4}$$

où f est coefficient du frottement et R_n — la pression normale du cylindre sur la sphère.

Puisque le plan équatorial de la sphère reste toujours sur le plan vertical Oxz la vitesse de rotation de la sphère est

$$\omega = \omega j, \quad \omega > 0 \tag{5}$$

parce que la sphère décendant se tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre. La sphère est un solide, c'est-à-dire nous avons la relation cinématique

$$v_P = v_C + \omega \times CP. \tag{6}$$

Ayant vu (1), (3) et (5) la relation (6) se réduit à l'équation

$$v = -\delta\dot{\theta} - r\omega \quad \text{où} \quad \delta = R - r. \tag{7}$$

La formule (7) donne la vitesse du glissement du point P où $\theta < 0$; les grandeurs $\dot{\theta}$ et ω doivent être déterminées. Le théorème de la resultante cinétique et le théorème du moment cinétique appliqué au point C se traduisent par les équations

$$\frac{d}{dt}(mv_C) = mg + R_n + T, \tag{8}$$

$$\frac{2}{5}mr^2\frac{d\omega}{dt} = CP \times T, \tag{9}$$

où selon (1) on a

$$R_n = -R_n(\sin\theta\, i + \cos\theta\, k), \qquad R_n > 0. \tag{10}$$

Ayant vu que

$$x_C = \delta\sin\theta, \quad z_C = \delta\cos\theta, \quad y_C = 0$$

nous obtenons de (8), (10) et (4)

$$\begin{aligned} m\delta\cos\theta\,\ddot\theta - m\delta\sin\theta\,\dot\theta^2 &= -R_n\sin\theta + fR_n\cos\theta, \\ -m\delta\sin\theta\,\ddot\theta - m\delta\cos\theta\,\dot\theta^2 &= mg - R_n\cos\theta - fR_n\sin\theta, \end{aligned} \tag{11}$$

où

$$m\delta\ddot\theta = -mg\sin\theta + fR_n, \qquad m\delta\dot\theta^2 = R_n - mg\cos\theta.$$

Des formules (11) on obtient

$$R_n = mg\cos\theta + m\delta\dot\theta^2. \tag{12}$$

Remplaçons (12) en (11) et on trouve l'équation

$$\delta\ddot\theta - f\delta\dot\theta^2 - fg\cos\theta + g\sin\theta = 0. \tag{13}$$

On remarquera que si f a des valeurs petites (13) se réduit à l'équation du pendule.

Il n'est pas difficile de voir que l'équation (13) exprime le mouvement d'un point qui se mouvoit sur une circonférence matérielle avec frottement. De l'équation (9) ayant vu (4), (5) et (12) on obtient

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{5f}{2r}\left(g\cos\theta + \delta\dot\theta^2\right). \tag{14}$$

Dernière équation montre que $\omega(t)$ est une fonction croissant du temps mais si le coefficient du frottement est très petit ω devient une constante en particulier zéro (si $\omega_0 = 0$), c'est à dire si le frottement est très faible nous pouvons avoir (pour la sphère) seulement glissement sans roulement.

Retournons a l'équation (13); on a

$$\ddot\theta = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\dot\theta^2\right).$$

Posons $\dot\theta^2 = u$ et nous obtenons de (13)

$$\frac{1}{2}\delta\frac{du}{d\theta} - f\delta u + g\sin\theta - fg\cos\theta = 0. \tag{15}$$

La solution générale de l'équation (15) s'exprime par la formule

$$u = \dot\theta^2 = Ce^{2f\theta} + \lambda\sin\theta + \mu\cos\theta, \tag{16}$$

où C est une constante d'integration et les constantes λ, μ sont

$$\lambda = \frac{6fg}{\delta(1+4f)}, \qquad \mu = \frac{2g(1-2f^2)}{\delta(1+4f^2)}. \tag{17}$$

La constante C s'exprime par les conditions imitiables du mouvement

$$C = e^{-2f\theta_0}\left(\dot\theta_0^2 - \lambda\sin\theta_0 - \mu\cos\theta_0\right). \tag{18}$$

Ayant vu que $\theta(t)$ est une fonction décroissante du temps on obtient de (16) et (18)

$$\theta = -\sqrt{e^{-2f(\theta-\theta_0)}A + \lambda \sin\theta + \mu\cos\theta}, \tag{19}$$

où

$$A = \dot{\theta}_0^2 - \lambda \sin\theta_0 - \mu\cos\theta_0 \tag{20}$$

et λ, μ sont données par (17).

Nous donnerons une solution approximative de l'équation (19) supposant que le coefficient f est un nombre petit, c'est-à-dire

$$f^2 = 0, \quad f^3 = 0 \quad \text{etc.} \tag{21}$$

D'autre part nous supposons que l'angle θ varie en telles limites que nous pouvons accepter

$$\sin\theta = \theta, \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad e^{2f(\theta-\theta_0)} = 1 + 2f(\theta - \theta_0), \tag{22}$$

c'est-à-dire nous acceptons par exemple que $\theta_0 \leqq \frac{\pi}{4}$.

Ayant en vue ces raisons nous obtenons de (17) et (19)

$$\lambda = 6\frac{fg}{\delta}, \quad \mu = \frac{2g}{\delta}, \tag{23}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{\delta} + a(1 - 2f\theta_0) + f(2a + 6g)\theta\frac{g}{\delta}\theta^2}. \tag{24}$$

Posons

$$\theta = \varphi + f\left(3 + \frac{a\delta}{\theta}\right) \tag{25}$$

et remplaçons dans (24); on obtient

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{\delta} + a(1 - 2f\theta_0) - \frac{g}{\delta}\varphi^2}. \tag{26}$$

Nous acceptons que

$$f < \frac{1}{2\theta_0} \tag{27}$$

qui n'est pas une grande restriction pour f et encore que

$$\dot{\theta}_0^2 > 6\frac{fg}{\delta}\sin\theta_0 + \frac{2g}{\delta}\cos\theta_0. \tag{28}$$

C'est-à-dire nous avons une impulsion initiable. Alors il est évidement que l'expression $\frac{2g}{\delta} + (1 - 2f\theta_0)a$ est positive. Posons

$$b^2 = 2 + \frac{\delta}{g}a(1 - 2f\theta_0). \tag{29}$$

De l'équation (26) nous obtenons

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{\delta}}\sqrt{b^2 - \varphi^2}. \tag{30}$$

Apres l'integration de (30) et conformat (25) nous recevons

$$\theta = f\left(3 + \frac{a\delta}{g}\right) + C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t, \tag{31}$$

où a se détermine par (20) et C_1, C_2 sont les constantes suivantes:

$$C_1 = \theta_0 - f\left(3 + \frac{a\delta}{g}\right), \qquad C_2 = \sqrt{b^2 - C_1^2}. \tag{32}$$

Ayant en vue (20), (23), (29) nous obtenons

$$C = -\sqrt{\frac{\delta}{g}}\,\dot{\theta}, \quad \dot{\theta} < 0. \tag{33}$$

Retournons à l'équation (14) d'où nous déterminons la vitesse de la rotation $\omega(t)$ de la sphère ayant en vue (22) et (31); on obtient

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{5fg}{2r}\left(t\left(1 + \frac{1}{4}b\right)^2 + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\delta}{g}}\left(C_2^2 - C_1^2\right)\sin 2\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}C_1C_2\sqrt{\frac{\delta}{g}}\sin^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t\right), \tag{34}$$

où ω_0 est la vitesse de la rotation initiale.

De la formule (7) nous déterminons la vitesse du glissement du point de contact P.

Remplaçons dans (7), (31́) et (34) et nous obtenons

$$v(t) = C_1\sqrt{g\delta}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t + C_2\sqrt{g\delta}\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t - r\omega_0$$
$$- \frac{5f}{2}\left(g\left(1 + \frac{1}{4}b^2\right)t + \frac{3}{8}\sqrt{g\delta}\left(C_2^2 - C_1^2\right)\sin 2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t + \frac{3}{2}C_1C_2\sqrt{g\delta}\sin^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\right). \tag{35}$$

Posons $t = 0$ dans (35) et selon (33) on obtient

$$v_0 = -\delta\dot{\theta}_0 - r\omega_0 \tag{36}$$

qui coordonne avec formule (7).

Puisque $v_0 \neq 0$ pour avoir un mouvement frottement de glissement il faut de (36)

$$\omega_0 < \frac{\delta|\dot{\theta}_0|}{r}, \tag{37}$$

c'est-à-dire ω_0 est une grandeur bornée.

La formule (35) est valide aux valeurs suivantes de t, $0 \leqq t \leqq t_1$, où

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\delta}{g}} + \frac{C_1\sqrt{g\delta} - r\omega_0}{\sqrt{g\delta}|\dot{\theta}_0|}. \tag{38}$$

Au moment t_1 la vitesse v devient zéro, c'est-à-dire $v(t_1) = 0$. Après l'instant t_1 la vitesse du point de contacte P reste toujours zèro, c'est-à-dire nous avons un mouvement nonholonome de la sphère dans le cylindre.

Remplaçons t_1 dans la formule (31) et nous obtenons

$$\theta_1 = f\left(3 + \frac{a\delta}{g}\right) - C_1 \cos\frac{\delta|\dot{\theta}_0| + r\omega_0}{\dot{\theta}_0\sqrt{g\delta}} - C_2 \sin\frac{\delta\dot{\theta}_0 + r\omega_0}{\dot{\theta}_0\sqrt{g\delta}}. \tag{39}$$

Si le coefficient f est très petit $C_1 > 0$ et la formule (39) montre que $\theta_1 < 0$, c'est-à-dire selon le dess. 1 la sphère a passé le plus bas point du cylindre à gauche de l'axe Oz. Après le point θ_1 la sphère se retourne sans glissement sur le cylindre.

A la fin nous calculerons le travail de la force du frottement T qui se transforme en chaleur, c'est-à-dire en énérgie thermique. Ayant en vue (3) et (4) nous obtenons pour le travail élémentaire de T

$$dA = -fR_n v\, dt, \tag{40}$$

où R_n est la pression normale et v est la vitesse du glissement de la sphère. Le signe moins montre que le travail de T est négatif parcequ'il est dirigé au contraire du mouvement. Remplaçons (12) et (35) dans (40) et en conformant (21), (22), (31) nous obtenons

$$\begin{aligned} dA = & -fmg\,dt\Bigg(C_1\sqrt{g\delta}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t + C_2\sqrt{g\delta}\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t - r\omega_0 \\ & + C_1\sqrt{g\delta}\left(C_2^2 - \frac{1}{2}C_1^2\right)\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t + C_2\sqrt{g\delta}\left(C_2 - \frac{1}{2}C_1^2\right)\cos^3\sqrt{\frac{g}{\delta}}t \\ & - r\omega_0\left(C_2^2 - \frac{1}{2}C_1^2\right)\cos^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t + C_1\sqrt{g\delta}\left(C_1^2 - \frac{1}{2}C_2^2\right)\sin^3\sqrt{\frac{g}{\delta}}t \\ & + C_2\sqrt{g\delta}\left(C_1^2 - \frac{1}{2}C_2^2\right)\sin^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t - r\omega_0\left(C_1^2 - \frac{1}{2}C_2^2\right)\sin^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t \\ & + 3C_1^2C_2\sqrt{g\delta}\sin^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t + 3C_1C_2^2\sqrt{g\delta}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t \\ & - 3r\omega_0C_1C_2\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\Bigg). \end{aligned} \tag{41}$$

Après l'intégration de (41) nous obtenons pour le travail de T:

$$(42)\quad A(t) = -fmg\delta\Big(C_1 + C_1C_2^2 + \frac{1}{2}C_1^3 - \frac{r\omega_0}{\delta}\left(1+\frac{1}{4}b^2\right)t$$
$$+\left(C_2 + C_2^3 - \frac{1}{2}C_1^2C_2\right)\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t - \left(C_1 + C_1^3 - \frac{1}{2}C_1C_2^2\right)\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t$$
$$+\frac{3r\omega_0}{8\sqrt{g\delta}}(C_1^2 - C_2^2)\sin\left(2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\right) - \frac{3r\omega_0}{2\sqrt{g\delta}}C_1C_2\sin^2\sqrt{\frac{g}{\delta}}t$$
$$+\frac{1}{2}(3C_1^2C_2 - C_2^3)\sin^3\sqrt{\frac{g}{\delta}}t - \frac{1}{2}(3C_1C_2^2 - C_1^3)\cos^3\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\Big).$$

Quand $\omega_0 = 0$ on obtient de (42)

$$(43)\quad A(t) = -fm\delta\Big(C_1 + C_1C_2^2 + \frac{1}{2}C_1^3 + \left(C_2 + C_2^3 - \frac{1}{2}C_1^2C_2\right)\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t$$
$$-\left(C_1 + C_1^3 - \frac{1}{2}C_1C_2^2\right)\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t + \frac{1}{2}(3C_1^2C_2 - C_2^3)\sin^3\sqrt{\frac{g}{\delta}}t$$
$$-\frac{1}{2}(3C_1C_2^2 - C_1^3)\cos^3\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\Big).$$

Les constantes b, C_1, C_2 se donnent par (29), (32), (33). Tout le travail de la force du frottement se détermine par (42) et (43) pour $t = t_1$ où t_1 se donne de la formule (38).

Nous donnerons un exemple numérique. Prenons $R = 100$ ten, $r = 10$ ten, $\delta = 90$ ten, $\theta_0 = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$, $\dot{\theta}_0 = 5\,\mathrm{s}^{-1}$, $f = 0{,}1$, $\omega_0 = 0$.

Des formules (23), (20) nous obtenons

$$\lambda = 6{,}54\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \mu = 21{,}8\,\mathrm{s}^{-2}, \quad a = 5{,}02\,\mathrm{s}^{-2}.$$

Si la sphère est construite de fer nous avons

$$mg = 32{,}67\,\mathrm{kg}, \quad fmg\delta = 294{,}03\,\mathrm{kg\,ten}.$$

Remplaçons les données numériques dans la formule (43) et nous obtenons

$$|A| = 1477{,}2\,\mathrm{kg\,ten}.$$

C'est le travail que la sphère a achevée avec la force du frottement pendant leur mouvement. Ce travail se transforme en chaleur par la formule

$$(44)\qquad Q = IA,$$

où I est l'équivalent thermique du travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. Painlevé, P. Leçons sur le frottement. Moscou, 1954 (en russe).
2. Cabannes, H. Cours de mécanique générale. Paris, 1962.
3. Клементиев, Н. М. О некоторых вопросов теории трения. — Труды Хабаровского ин-та инж. ж. д. транспорта, вып. 16, 1964, 250–262.
4. Долапчиев, Бл. Аналитична механика. София, 1966.

Reçu le 10.09.1994