ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 3
Том 88, 1994

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 3
Tome 88, 1994

# ОБРАТИМИ КВАДРАТИЧНИ ТРАНСФОРМАЦИИ В ПРОЕКТИВНАТА РАВНИНА

ГЕОРГИ ПАСКАЛЕВ

*Георги Паскалев.* ОБРАТИМЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ В ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть в проективной плоскости заданы кривая $k$ второй степени и точка $P$, которая является неособой для $k$. Сопоставим произвольной точки $M$, отличной от $P$, ее сопряженную относительно $k$ точку $M'$, лежащей на прямой $MP$. Эту трансформацию будем называть обобщеной инверсией. Квадратичной трансформацией проективной плоскости $\pi$ называется такое отображение $\pi$ в $\pi$, для которого координаты образа $M'$ точки $M$ являются однородными функциями второй степени координат $M$. В работе доказано, что любую обратимую квадратичную трансформацию $S$ можно представить в виде $S = \pi_2 J \pi_1$, где $\pi_1$ и $\pi_2$ — линейные трансформации, а $J$ — обобщеная инверсия.

*Georgi Paskalev.* INVERTIBLE QUADRATIC TRANSFORMATIONS IN A PROJECTIVE PLANE.

Consider in the projective plane a curve $k$ of second order and a point $P$, which is nonsingular for $k$. To an arbitrary point $M$, different from $P$, let correspond its polar-conjugate point $M'$ with respect to $k$, which lies on the line $MP$. We call this transformation a generalized inversion. Also, we call quadratic transformation of the projective plane $\pi$ a map of $\pi$ into $\pi$ if the coordinates of the image $M'$ of $M$ are homogeneous functions of second order of the coordinates of $M$. We prove that any invertible quadratic transformation $S$ allows the representation $S = \pi_2 J \pi_1$, where $\pi_1$ and $\pi_2$ are linear transformations and $J$ is a generalized inversion.

Нека спрямо проективна координатна система в проективната равнина са дадени уравнението

$$k : F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0$$

на крива $k$ от втора степен и точката $P(l, m, n)$, която е неособена точка на $k$.

На произволна точка $M(x_1, x_2, x_3)$, различна от $P$, съпоставяме полярно спрегнатата ѝ относно $k$ точка $M'(x_1', x_2', x_3')$, която лежи на правата $MP$.

Така дефинираната геометрична трансформация наричаме обобщена инверсия. Точката $P$ се нарича полюс, а кривата $k$ — основна крива на обобщената инверсия.

Аналитичното представяне на обобщената инверсия е

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1' = & -(ma_{21} + na_{31})x_1^2 + (la_{21} - ma_{22} - na_{32})x_1x_2 + la_{22}x_2^2 \\ & + (la_{31} - ma_{32} - na_{33})x_1x_3 + 2la_{23}x_2x_3 + la_{33}x_3^2, \\ x_2' = & \, ma_{11}x_1^2 + (ma_{21} - la_{11} - na_{31})x_1x_2 - (na_{32} + la_{12})x_2^2 \\ & + 2ma_{31}x_1x_3 + (ma_{32} - la_{31} - na_{33})x_2x_3 + ma_{33}x_3^2, \\ x_3' = & \, ma_{11}x_1^2 + 2na_{12}x_1x_2 + na_{22}x_2^2 + (na_{13} - ma_{21} - la_{11})x_1x_3 \\ & + (na_{23} - ma_{22} - la_{12})x_2x_3 - (la_{13} + ma_{23})x_3^2, \end{aligned}$$

което може да се напише във вида

$$\left| \begin{aligned} x_1' &= (lx_2 - mx_1)F_2 - (mx_1 - lx_3)F_3, \\ x_2' &= (mx_3 - nx_2)F_3 - (lx_2 - mx_1)F_1, \\ x_3' &= (nx_1 - lx_3)F_1 - (mx_3 - nx_2)F_2, \end{aligned} \right.$$

или още по-кратко

$$(2)\qquad x_1' = lF - x_1f, \quad x_2' = mF - x_2f, \quad x_3' = nF - x_3f,$$

където

$$f = F_1(l, m, n)x_1 + F_2(l, m, n)x_2 + F_3(l, m, n)x_3.$$

От дефиницията на обобщената инверсия следва, че ако правата $PM$ пресича основната крива в две точки $S_1$ и $S_2$, точката $M'$ е хармонично спрегната точка на $M$ относно $S_1$ и $S_2$.

Обобщената инверсия не е еднозначно обратимо съответствие на точките в проективната равнина. Наистина от (2) следва, че всяка точка от полярата $p$ (с уравнение $f = 0$) на точката $P$ относно $k$ има за образ точката $P$. Поради това за образ на точката $P$ при инверсията се дефинира цялата права $p$.

Нека основната крива $k$ е овална, полюсът $P$ е външна точка за $k$ и $U$ и $V$ са допирните точки на тангентите през $P$ към $k$. Полярите на точките $U$ и $V$ спрямо $k$ са съответно правите $UP$ и $VP$, а $p = UV$. Понеже

$F(U) = F(V) = f(U) = f(V) = 0$, от (2) следва, че и точките $U$ и $V$ не притежават определени образи. От друга страна, според дефиницията на обобщената инверсия всяка точка $T$ $(T \neq P)$ от правата $UP$ има за образ точката $U$, както и всяка точка $T$ $(T \neq P)$ от правата $VP$ има за образ точката $V$. Поради това за образ на точката $U$ се дефинира правата $UP$, а на точката $V$ — правата $VP$.

Триъгълникът $UVP$ се нарича *убежен триъгълник*, а точките $U$ и $V$ — убежни точки на обобщената инверсия. Всеки връх на убежния триъгълник е образ на всички точки от страна на този триъгълник. Всички точки от всяка страна на убежния триъгълник с изключение на върховете му имат един и същ образ — връх на убежния триъгълник.

Точките на основната крива $k$ с изключение на върховете $U$ и $V$ на убежния триъгълник (ако има такъв) са двойни точки на обобщената инверсия.

Обобщената инверсия е инволюторна трансформация, защото, като изключим точките от страните на убежния триъгълник, останалите точки от равнината се разделят на двойки съответни точки $M$ и $M'$, които или съвпадат и лежат на $k$, или са различни, спрегнати относно $k$ и колинеарни с полюса $P$.

В зависимост от вида на основната крива и полюса имаме следните видове основни инверсии:

1. *Обобщена инверсия с овална основна крива и външен полюс.* Ако се избере убежният трнъгълник за координатен триъгълник на проективната координатна система така, че координатите на върховете и уравненията на страните на този триъгълник да бъдат

$$\begin{array}{ccc} U(1,0,0), & V(0,1,0), & P(0,0,1), \\ u = UP : x_2 = 0, & v = VP : x_1 = 0, & p = UV : x_3 = 0, \end{array}$$

уравнението на основната крива $k$ ще бъде от вида $x_3^2 = \lambda x_1 x_2$ ($\lambda \neq 0$ е параметър), тъй като $k$ минава през точките $U$ и $V$ и се допира до правите $u$ и $v$. При подходящ избор на единичната точка може да се направи $\lambda = 1$.

Аналитичното представяне (1) на обобщената инверсия е

$$(3) \qquad x_1' = x_1 x_3, \quad x_2' = x_2 x_3, \quad x_3' = x_1 x_2.$$

2. *Обобщена инверсия с овална основна крива и вътрешен полюс.* Като се избере проективна координатна система, при която полюсът $P$ да бъде третият координатен връх $(0,0,1)$, а основната крива да има уравнение $k : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, аналитичното представяне на обобщената инверсия е

$$(4) \qquad x_1' = x_1 x_3, \quad x_2' = x_2 x_3, \quad x_3' = x_1^2 + x_2'.$$

Убежните точки сега са $U(i,1,0)$ и $V(-i,1,0)$, т. е. комплексно спрегнати.

3. *Обобщена инверсия с овална основна крива и полюс върху нея.* Като се избере проективна координатна система, при която полюсът $P(1,0,0)$

да бъде първият координатен връх, а основната крива да има уравнение $k : x_3^2 = 2x_1x_2$, аналитичното представяне на обобщената инверсия е

$$x_1' = x_3^2 - x_1x_2, \quad x_2' = x_2^2, \quad x_3' = x_2x_3. \tag{5}$$

4. *Обобщена инверсия с неизродена имагинерна основна крива.* Като се избере проективна координатна система, при която полюсът $P$ да бъде третият координатен връх $(0, 0, 1)$, а основната крива да бъде $k : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, аналитичното представяне на инверсията е

$$x_1' = -x_1x_3, \quad x_2' = -x_2x_3, \quad x_3' = x_1^2 + x_2^2.$$

5. *Обобщена инверсия с основна крива две реални пресекателни прави и полюс, нележащ на основната крива.* Като се избере проективна координатна система така, че полюсът $P$ да бъде координатен връх $(1, 0, 0)$, а основната крива да има уравнение $k : x_1^2 - x_2^2 = 0$, аналитичното представяне на инверсията е

$$x_1' = x_2^2, \quad x_2' = x_1x_2, \quad x_3' = x_1x_3. \tag{6}$$

6. *Обобщена инверсия с основна крива две реални пресекателни прави и полюс, лежащ на основната крива.* Като се избере проективна координатна система с координатни върхове $E_1 = P(1, 0, 0)$ върху едната права $a_1$, $E_2(0, 1, 0)$ върху другата права $a_2$ и $E_3(0, 0, 1)$ — пресечната точка на двете прави, аналитичното представяне на обобщената инверсия е

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3,$$

което е линейна трансформация — хармонична хомология с ос правата $a_2$ и център точката $P$.

7. *Обобщена инверсия с основна крива две комплексно спрегнати прави.* Като се избере проективна координатна система така, че полюсът $P$ да бъде координатен връх $(1, 0, 0)$, а основната крива $k$ да има уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 0$, аналитичното представяне на обобщената инверсия е

$$x_1' = x_2^2, \quad x_2' = -x_1x_2, \quad x_3' = -x_1x_3.$$

## 2. КОНГРУЕНЦИИ НА КРИВИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

**К-1**. Нека $M_1$, $M_2$, $M_3$ са три неколинеарни точки и правата $M_iM_j$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$ има уравнение $l_{ij} = l_{ij}(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Тогава при произволна ненулева тройка числа $\lambda$, $\mu$, $\nu$ уравнението

$$\lambda l_{12}l_{13} + \mu l_{21}l_{23} + \nu l_{31}l_{32} = 0 \tag{7}$$

представя крива от втора степен през трите точки $M_1$, $M_2$, $M_3$.

Обратно, за всяка крива от втора степен, която минава през трите точки $M_1$, $M_2$, $M_3$, съществува ненулева тройка числа $\lambda$, $\mu$, $\nu$, тъй че уравнението на кривата е (7).

Множеството от всички криви, които минават през три точки, се нарича конгруенция на криви от втора степен. Уравнението (7) е аналитично представяне на снопа.

Изказаното твърдение е в сила и когато две от трите точки съвпадат.

**К-2**. Нека $M_1$ и $M_2$ са две точки, $t_1$ е права, която минава през $M_1$, правите $M_1M_2$ и $t_1$ имат съответно уравнения

$$M_1M_2 : l_{12} = l_{12}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad t_1 : l_1 = l_1(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

а $l = l(x_1, x_2, x_3) = 0$ е уравнение на права, различна от $M_1M_2$, която минава през точката $M_2$. Тогава при произволна ненулева тройка числа $\lambda$, $\mu$, $\nu$ уравнението

$$\lambda l_{12}^2 + \mu l_1 l_{12} + \nu l_1 l = 0 \tag{8}$$

представя крива от втора степен през двете точки $M_1$ и $M_2$, която се допира до $t_1$ в точката $M_1$. Обратно, за всяка крива от втора степен, която минава през двете точки $M_1$, $M_2$ и се допира до правата $t_1$ в $M_1$, съществува ненулева тройка числа $\lambda$, $\mu$, $\nu$, тъй че уравнението на кривата е (8).

Конгруенциите на криви от вида **К-2** са частен случай на тези от вида **К-1** в смисъл, че някои две от трите точки, определящи конгруенцията, се сливат. В такъв случай под съединителна права на сливащите се точки се разбира дадената тангента на кривата в двойната точка.

Естествено е да се разгледат частни случаи на **К-1**, при които три от дадените точки да се сливат. В такъв случай под съединителна права на всеки две от трите сливащи се точки трябва да се разбира дадената тангента на кривата в тройната точка. Тъй като сега допирането на различните криви от конгруенцията е с един ред по-високо, налага се едно допълнително изискване за параметрите.

Нека две криви от втора степен $k_1 : F(x_1, x_2, x_3) = 0$ и $k_2 : G(x_1, x_2, x_3) = 0$ съответно с детерминанти $A^*$ и $B^*$ имат обща точка $P$, т. е. $F(P) = G(P) = 0$.

Двете криви $k_1$ и $k_2$ имат обща допирателна в точката $P$, когато са изпълнени равенствата

$$\frac{F_1(P)}{G_1(P)} = \frac{F_2(P)}{G_2(P)} = \frac{F_3(P)}{G_3(P)}.$$

В такъв случай и кривите се допират в точката $P$. Допирането на $k_1$ и $k_2$ в точката $P$ е от по-висок ред, ако са изпълнени равенствата

$$\frac{F_1^3(P)}{G_1^3(P)} = \frac{F_2^3(P)}{G_2^3(P)} = \frac{F_3^3(P)}{G_3^3(P)} = \frac{A^*}{B^*}. \tag{9}$$

**К-3**. Нека трите прави

$$a_1 : a_1(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

$$a_2 : a_2(x_1, x_2, x_3) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$

$$a_3 : a_3(x_1, x_2, x_3) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0,$$

не са конкурантни (не минават през една точка), т. е.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пресечната точка на правите $a_2$ и $a_3$ е $A_1(A_{11}, A_{12}, A_{13})$. Тогава при произволна ненулева тройка числа $\lambda$, $\mu$, $\nu$ уравнението

$$(10) \qquad F(x_1, x_2, x_3) = \mu a_2^2 + \nu a_2 a_3 - \lambda(a_3^2 - a_1 a_2) = 0$$

представя крива от втора степен, която се допира до правата $a_2$ в точка $A_1$. Тъй като $A^* = \frac{1}{4}A^2\lambda^3$ и $F_1(A_1) = \frac{1}{2}\lambda a_{11}A$, $F_2(A_1) = \frac{1}{2}\lambda a_{22}A$, $F_3(A_1) = \frac{1}{2}\lambda a_{33}A$, за всеки две криви от множеството криви (10) условието (9) е изпълнено. Следователно всеки две от кривите (10) имат в точката $A_1$ допиране от по-висок ред.

Уравнението (10) е аналитично представяне на конгруенция на криви от втора степен с тройна точка $A_1$ и обща допирателна $a_2$.

**К-4**. Нека са дадени три прави с уравнения

$$a_1(x_1, x_2, x_3) \pm i a_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad a_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

където

$$a_i(x_1, x_2, x_3) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

като първите две от тях се пресичат в реална точка $M_3$, а пресечните им точки $M_1$ и $M_2$ с третата права са комплексно спрегнати. Тогава при произволна ненулева тройка числа $\lambda$, $\mu$, $\nu$ уравнението

$$(7\text{-A}) \qquad \lambda a_1 a_3 + \mu a_2 a_3 + \nu(a_1^2 + a_2^2) = 0$$

представя крива от втора степен през трите точки $M_1$, $M_2$, $M_3$.

Обратно, за всяка крива от втора степен през трите точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ съществува ненулева тройка числа $\lambda$, $\nu$, $\nu$, тъй че уравнението на кривата е (7-А).

## 3. КВАДРАТИЧНИ ТРАНСФОРМАЦИИ В ПРОЕКТИВНАТА РАВНИНА

Квадратична трансформация в проективната равнина $\pi$ се нарича изображение на $\pi$ в $\pi$, при което координатите $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ на образа $M'$ са хомогенни функции от втора степен на координатите $x_1$, $x_2$, $x_3$ на оригинала $M$, т. е.

$$(11) \qquad \varphi: \left| \begin{aligned} x'_1 &= c'_{11}x_1^2 + c'_{22}x_2^2 + c'_{33}x_3^2 + 2c'_{12}x_1x_2 + 2c'_{23}x_2x_3 + 2c'_{31}x_3x_1, \\ x'_2 &= c''_{11}x_1^2 + c''_{22}x_2^2 + c''_{33}x_3^2 + 2c''_{12}x_1x_2 + 2c''_{23}x_2x_3 + 2c''_{31}x_3x_1, \\ x'_3 &= c'''_{11}x_1^2 + c'''_{22}x_2^2 + c'''_{33}x_3^2 + 2c'''_{12}x_1x_2 + 2c'''_{23}x_2x_3 + 2c'''_{31}x_3x_1, \end{aligned} \right.$$

или накратко

$$x_1' = F_1(x_1, x_2, x_3), \quad x_2' = F_2(x_1, x_2, x_3), \quad x_3' = F_3(x_1, x_2, x_3),$$

където коефициентите са реални числа и удовлетворяват условията за симетричност

$$c_{ij}' = c_{ji}', \quad c_{ij}'' = c_{ji}'', \quad c_{ij}''' = c_{ji}''' \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

матрицата

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}' & c_{22}' & c_{33}' & c_{12}' & c_{23}' & c_{31}' \\ c_{11}'' & c_{22}'' & c_{33}'' & c_{12}'' & c_{23}'' & c_{31}'' \\ c_{11}''' & c_{22}''' & c_{33}''' & c_{12}''' & c_{23}''' & c_{31}''' \end{pmatrix}$$

има ранг 3 и функциите $F_1$, $F_2$, $F_3$ не са зависими.

Кривите от втора степен $k_1$, $k_2$, $k_3$ съответно с уравнения

$$k_1 : F_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad k_2 : F_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad k_3 : F_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

се наричат криви на квадратичната трансформация.

Условието рангът на матрицата $C$ да е 3 е съществено. В противен случай десните страни на (11) ще бъдат линейно зависими, т. е. цялата равнина ще се изобрази в една права.

Условието функциите $F_1$, $F_2$, $F_3$ да не са изобщо зависими е също съществено. Например, ако

$$x_1' = x_1^2, \quad x_2' = x_2^2, \quad x_3' = 2x_1x_2,$$

матрицата

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

има ранг 3. Функциите $F_1$, $F_2$, $F_3$ не са линейно зависими, но те са зависими, тъй като $F_3^2 = 4F_1F_2$. Условията за квадратична трансформация не са изпълнени. Такава трансформация би изобразила цялата проективна равнина само върху кривата от втора степен $x_3^2 = 2x_1x_2$.

Квадратичната трансформация (11) в частен случай е проективност (линейна трансформация), когато трите криви $k_1$, $k_2$, $k_3$ са изродени и съдържат една и съща права.

Една точка $P$ наричаме особена (опорна) точка на квадратичната трансформация (11), когато

$$F_1(P) = F_2(P) = F_3(P) = 0,$$

т. е. когато тя лежи и на трите криви $k_1$, $k_2$, $k_3$.

В сила е следната

**Теорема.** *Всяка квадратична трансформация, която не е линейна трансформация, притежава най-много три особени точки. Ако броят на особените точки е 3, те не лежат на една права.*

*Доказателство.* Ако квадратичната трансформация $\varphi$ притежава 3 различни особени точки, които лежат на една права, то трите криви $k_1$, $k_2$, $k_3$ ще съдържат тази права и следователно $\varphi$ ще бъде проективност.

Нека $\varphi$ не е проективност и притежава поне 4 различни особени точки $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$. Тъй като никои 3 от тези точки не лежат на една права, трите криви $k_1$, $k_2$, $k_3$ принадлежат на снопа криви, определен от точките $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$. Следователно трите форми $F_1$, $F_2$, $F_3$ ще бъдат линейно зависими, т. е. матрицата $C$ ще има ранг, по-малък от 3.

По-общо: трите криви $k_1$, $k_2$, $k_3$ на една квадратична трансформация не могат да принадлежат на един сноп криви от втора степен.

Необходимо и достатъчно условие квадратичната трансформация (11) да бъде обобщена инверсия е, щом някой елемент на табл. 1 е нула, да бъдат равни на нула всичките елементи или на реда, или на стълба на този елемент, а ненулевите редове да бъдат пропорционални.

Таблица 1

| | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $-c''_{12}-c'''_{13}$ | $c''_{11}$ | $c'''_{11}$ |
| $a_{22}$ | $c'_{22}$ | $-c'_{12}-c'''_{23}$ | $c'''_{22}$ |
| $a_{33}$ | $c'_{33}$ | $c''_{33}$ | $-c'_{13}-c''_{23}$ |
| $2a_{12}$ | $c'_{12}-c'''_{23}-c''_{22}$ | $c''_{12}-c'''_{13}-c'_{11}$ | $2c'''_{12}$ |
| $2a_{23}$ | $2c'_{23}$ | $c''_{23}-c'_{13}-c'''_{33}$ | $c'''_{23}-c'_{12}-c''_{22}$ |
| $2a_{31}$ | $c'_{13}-c''_{23}-c'''_{33}$ | $2c''_{13}$ | $c'''_{13}-c''_{12}-c'_{11}$ |

Елементите на кой да е ненулев ред на таблицата са координати на полюса на обобщената инверсия, а елементите на кой да е ненулев стълб са коефициенти в основната крива на инверсията.

Квадратичната трансформация (11) е обратима, когато системата уравнения (11) има решение

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= b'_{11}{x'_1}^2 + b'_{22}{x'_2}^2 + b'_{33}{x'_3}^2 + 2b'_{12}x'_1x'_2 + 2b'_{23}x'_2x'_3 + 2b'_{31}x'_3x'_1, \\ x_2 &= b''_{11}{x'_1}^2 + b''_{22}{x'_2}^2 + b''_{33}{x'_3}^2 + 2b''_{12}x'_1x'_2 + 2b''_{23}x'_2x'_3 + 2b''_{31}x'_3x'_1, \\ x_3 &= b'''_{11}{x'_1}^2 + b'''_{22}{x'_2}^2 + b'''_{33}{x'_3}^2 + 2b'''_{12}x'_1x'_2 + 2b'''_{23}x'_2x'_3 + 2b'''_{31}x'_3x'_1, \end{aligned}\right.$$

или накратко

$$x_1 = G_1(x'_1, x'_2, x'_3), \qquad x_2 = G_2(x'_1, x'_2, x'_3), \qquad x_3 = G_3(x'_1, x'_2, x'_3),$$

т. е. когато $x_1$, $x_2$, $x_3$ са квадратични форми на $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$. В такъв случай ще съществува хомогенна функция от трета степен на $x_1$, $x_2$, $x_3$

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3) &= A_{111}x_1^3 + A_{222}x_2^3 + A_{333}x_3^3 + 6A_{123}x_1x_2x_3 \\ &\quad + 3\left(A_{113}x_1^2x_3 + A_{112}x_1^2x_2 + A_{122}x_1x_2^2 + A_{223}x_2^2x_3 + A_{133}x_1x_3^2 + A_{233}x_2x_3^2\right),\end{aligned}$$

такава че да са в сила тъждествата

$$F_1[G_1(x_1,x_2,x_3),G_2(x_1,x_2,x_3),G_3(x_1,x_2,x_3)] = x_1\Phi(x_1,x_2,x_3),$$
$$F_2[G_1(x_1,x_2,x_3),G_2(x_1,x_2,x_3),G_3(x_1,x_2,x_3)] = x_2\Phi(x_1,x_2,x_3),$$
$$F_3[G_1(x_1,x_2,x_3),G_2(x_1,x_2,x_3),G_3(x_1,x_2,x_3)] = x_3\Phi(x_1,x_2,x_3).$$

Една квадратична трансформация е обратима, когато трите ѝ криви $k_1$, $k_2$, $k_3$ принадлежат на една и съща конгруенция на криви от втора степен.

Нека трите прави

$$\left|\begin{aligned} a_1 &= a_1(x_1,x_2,x_3) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,\\ a_2 &= a_2(x_1,x_2,x_3) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,\\ a_3 &= a_3(x_1,x_2,x_3) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{aligned}\right.$$

не са конкурантни, т. е.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пресечните точки $A_1 = (a_2,a_3)$, $A_2 = (a_3,a_1)$, $A_3 = (a_1,a_2)$ на тези прави имат координати $A_1(A_{11},A_{12},A_{13})$, $A_2(A_{21},A_{22},A_{23})$, $A_3(A_{31},A_{32},A_{33})$, където $A_{ij}$ е адюнгираното количество на $a_{ij}$ на $A$.

Квадратичната трансформация

$$\varphi_3 : \left|\begin{aligned} x'_1 &= b_{11}a_2a_3 + b_{21}a_3a_1 + b_{31}a_1a_2,\\ x'_2 &= b_{12}a_2a_3 + b_{22}a_3a_1 + b_{32}a_1a_2,\\ x'_3 &= b_{13}a_2a_3 + b_{23}a_3a_1 + b_{33}a_1a_2, \end{aligned}\right.$$

където

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

трите криви на която принадлежат на конгруенцията на криви от втора степен от вида **К-1**, определен от трите точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, има три опорни точки $A_1$, $A_2$ и $A_3$.

Трансформацията $\varphi_3 = \pi_2 J_3 \pi_1$ е произведение на трите трансформации:

1) проективността

$$\pi_1 : \left|\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3; \end{aligned}\right.$$

2) трансформацията

$$J_3 : \left| \; x'_1 = x_2x_3, \quad x'_2 = x_3x_1, \quad x'_3 = x_1x_2; \right.$$

3) проективността

$$\pi_2 : \left|\begin{aligned} x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3\\ x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3\\ x'_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3. \end{aligned}\right.$$

Трансформацията $J_3$ може да бъде коя да е от шестте трансформации

$$\begin{array}{llll}
T_1. & x_1' = x_2x_3, & x_2' = x_1x_2, & x_3' = x_1x_3; \\
T_2. & x_1' = x_1x_2, & x_2' = x_3x_1, & x_3' = x_2x_3; \\
T_3. & x_1' = x_1x_3, & x_2' = x_2x_3, & x_3' = x_1x_2; \\
T_4. & x_1' = x_2x_3, & x_2' = x_3x_1, & x_3' = x_1x_2; \\
T_5. & x_1' = x_1x_2, & x_2' = x_2x_3, & x_3' = x_1x_3; \\
T_6. & x_1' = x_1x_3, & x_2' = x_1x_2, & x_3' = x_2x_3,
\end{array}$$

първите три от които са обобщени инверсии с овална основна крива и външен полюс. Например $T_3$ съвпада с (3).

Но ако се вземе например $J_3 = T_3$, проективността $\pi_2$ трябва да се вземе

$$\left|\begin{array}{l}
x_1' = b_{21}x_1 + b_{11}x_2 + b_{31}x_3 \\
x_2' = b_{22}x_1 + b_{12}x_2 + b_{32}x_3 \\
x_3' = b_{23}x_1 + b_{13}x_2 + b_{32}x_3.
\end{array}\right.$$

Следователно всяка квадратична трансформация с три опорни точки може да се представи във вида $\varphi_3 = \pi_2 J_3 \pi_1$, където $\pi_1$ и $\pi_2$ са линейни трансформации, а $J_3$ е коя да е от трансформациите $T_1 - T_6$.

Обратната трансформация на $\varphi_3$ е $\varphi_3^{-1} = \pi_1^{-1} J_3 \pi_2^{-1}$, тъй като всяка от трансформациите $T_1 - T_6$ е инволюторна ($J_3^{-1} = J_3$).

Трансформациите $\pi_1^{-1}$ и $\pi_2^{-1}$ са

$$\pi_1^{-1}: \left|\begin{array}{l}
x_1' = A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3 \\
x_2' = A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3 \\
x_3' = A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3,
\end{array}\right. \qquad
\pi_2^{-1}: \left|\begin{array}{l}
x_1' = B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3 \\
x_2' = B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + B_{23}x_3 \\
x_3' = B_{31}x_1 + B_{32}x_2 + B_{33}x_3,
\end{array}\right.$$

където $B_{ij}$ е адюнгираното количество на елемента $b_{ij}$ на $B$. Обратната трансформация $\varphi_3^{-1}$ е квадратична трансформация също с три опорни точки $B_1(b_{11}, b_{12}, b_{13})$, $B_2(b_{21}, b_{22}, b_{23})$, $B_3(b_{31}, b_{32}, b_{33})$.

Всяка точка от правите $b_1 = B_2B_3$, $b_2 = B_3B_1$, $b_3 = B_1B_2$ с изключение на точките $B_1$, $B_2$, $B_3$ се трансформира чрез $\varphi_3^{-1}$ съответно в точките $A_1$, $A_2$, $A_3$.

Като се приложат за произволна точка $P(x_1, x_2, x_3)$ последователно $\varphi_3$ и $\varphi_3^{-1}$, получава се точката $AB^2a_1a_2a_3 \equiv P$. Следователно функцията $\Phi$ е $\Phi = AB^2a_1a_2a_3$.

В специалния случай, когато две от опорните прави са комплексно спрегнати, уравненията на трите прави са

$$\begin{aligned}
&a_1 + ia_2 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - b_{31}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0, \\
&a_1 - ia_2 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - i(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0, \\
&a_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0,
\end{aligned}$$

а две от трите опорни точки са комплексно спрегнати. Всички квадратични трансформации, чиито криви минават през тези три опорни точки, се дават със

$$\begin{aligned}
x_1' &= b_{11}a_1a_3 + b_{21}a_2a_3 + b_{31}(a_1^2 + a_2^2), \\
x_2' &= b_{12}a_1a_3 + b_{22}a_2a_3 + b_{32}(a_1^2 + a_2^2), \\
x_3' &= b_{13}a_1a_3 + b_{23}a_2a_3 + b_{33}(a_1^2 + a_2^2),
\end{aligned}$$

т. е. всяка от тях има вида $\pi_2 J_3^* \pi_1$, където $J_3^*$ е обобщената инверсия (4). Обратната трансформация е $\pi_1^{-1} J_3^* \pi_2^{-1}$, тъй като обобщената инверсия (4) е инволюторна. Функцията $\Phi$ е $\Phi = A.B^2 a_3(a_1^2 + a_2^2)$. Сега трите криви на трансформацията принадлежат на конгруенция на криви от втора степен от вид **К-4**.

Квадратичната трансформация

$$\varphi_2 : \left| \begin{array}{l} x_1' = b_{11}a_2^2 + b_{21}a_1a_2 + b_{31}a_1a_3 \\ x_2' = b_{12}a_2^2 + b_{22}a_1a_2 + b_{32}a_1a_3 \\ x_3' = b_{13}a_2^2 + b_{23}a_1a_2 + b_{33}a_1a_3 \end{array} \right.$$

с $B \neq 0$, трите криви на която принадлежат на конгруенцията на криви от втора степен от вида **К-2**, т. е. които се допират до правата $a_1 = 0$ в точката $M_3$ и минават през точката $M_1$, има две опорни точки $M_1$ и $M_3$, като $M_3$ е двойна.

Всяка от трансформациите $\varphi_2$ има вида $\pi_2 J_2 \pi_1$, където $J_2$ е обобщената инверсия (6).

Обратната ѝ трансформация е $\varphi_2^{-1} = \pi_1^{-1} J_2 \pi_2^{-1}$. Като се приложат за произволна точка $P(x_1, x_2, x_3)$ последователно $\varphi_2$ и $\varphi_2^{-1}$, получава се

$$\begin{aligned} \pi_2^{-1}\varphi_2(P) &= (Ba_2^2, Ba_1a_2, Ba_1a_3), \\ J_2\pi_2^{-1}\varphi_2(P) &= (B^2a_1^2a_2^2, B^2a_1a_2^3, B^2a_1a_2^3), \\ \pi_1^{-1}J_2\pi_2^{-1}\varphi_2(P) &= AB^2a_1a_2^2P. \end{aligned}$$

Следователно функцията $\Phi$ е $\Phi = AB^2a_1a_2^2$.

Квадратичната трансформация

$$\varphi_1 : \left| \begin{array}{l} x_1' = b_{11}(a_3^2 - a_1a_2) + b_{21}a_2^2 + b_{31}a_2a_3 \\ x_2' = b_{12}(a_3^2 - a_1a_2) + b_{22}a_2^2 + b_{32}a_2a_3 \\ x_3' = b_{13}(a_3^2 - a_1a_2) + b_{23}a_2^2 + b_{33}a_2a_3 \end{array} \right.$$

с $B \neq 0$, трите криви на която принадлежат на конгруенцията на криви от втора степен от вида **К-3**, т. е. всеки две от които имат допиране от по-висок ред в точката $A_1 = a_2a_3$ с обща допирателна $a_2$, има тройна опорна точка $A_1$.

Всяка от трансформациите $\varphi_1$ има вида $\pi_2 J_1 \pi_1$, където $J_1$ е обобщената инверсия (5). Обратната ѝ трансформация е $\varphi_1^{-1} = \pi_1^{-1} J_1 \pi_2^{-1}$.

Като се приложат за произволна точка $P(x_1, x_2, x_3)$ последователно $\varphi_1$ и $\varphi_1^{-1}$, получава се

$$\begin{aligned} \pi_2^{-1}\varphi_1(P) &= [B(-a_1a_2 + a_3^2), Ba_2^2, Ba_2a_3], \\ J_1\pi_2^{-1}\varphi_1(P) &= (B^2a_1a_2^3, B^2a_2^4, B^2a_3a_2^3), \\ \pi_1^{-1}J_1\pi_2^{-1}\varphi_1(P) &= AB^2a_2^3P. \end{aligned}$$

Следователно функцията $\Phi$ е $\Phi = AB^2a_2^3$.

Окончателно получихме, че за всяка обратима квадратична трансформация $\varphi$ в проективната равнина могат да се намерят ненулеви $A$ и $B$, така че $\varphi = \pi_2 J \pi_1$, където обобщената инверсия $J$ е (5), (6), (3) или

(4) според това, дали има тройна опорна точка, две опорни точки, от които едната е двойна, три реални опорни точки или една реална и две комплексно спрегнати опорни точки.

*Постъпила 05.02.1994*