

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 3

Том 88, 1994

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 3

Tome 88, 1994

---

## ДУХАЗЕН ПОТОК ВЪВ ВИСКОЗНА СРЕДА

ИВАН ВОЗДУГАНОВ

*Иван Воздуганов. ДВУХАЗНЫЙ ПОТОК В ВИСКОЗНОЙ СРЕДЕ*

В настоящей работе двухфазная среда рассматривается в рамках двух взаимодействующих и взаимно проникающих сред. Непрерывная среда рассматривается в двух постановках — идеальный и вязкозний флюид. В случае вязкозной модели выведены уравнения пограничного слоя для двухфазной среды в рамках двуконтинуальной модели. Устанавливается, что концентрация дисперсной фазы влияет существенно динамики двухфазной среды.

*Ivan Bozduganov. A TWO-PHASE FLOW IN A VISCOUS MEDIUM*

In the present paper it is assumed that the bubble-liquid mixture can be considered within the framework of a model of two interacting and interpenetrating continuous media. In the case of viscous continuous phase the equation of boundary layer flow for a two phase media is carried out. It is found out that the concentration of the bubbles influences strongly the velocity field due to the increasing of the quasi-Stokes force.

Динамиката на духазните газо-течни потоци, чиито фази не се смесват на молекулярно ниво, представлява съществено интерес в химическите технологии. Духазните потоци се използват за осъществяване на максимален контакт между двете фази при масообменните и химическите процеси.

По-голямата част от газо-течните системи в контактните апарати са изучени екстензивно и на това се дължи голямото количество получени пирични равенства за описване на техните свойства и изчисления при проектиране на съответните апарати.

Някои теоретични изследвания в тази област, които си поставят за цел да изучат детайлите на макроскопичните процеси, изискват конститутивните уравнения, описващи преноса на маса, момент и количество на движение в локални променливи [1-4].

В настоящата статия се допуска, че газо-течната среда се състои от малки газови мехури, диспергирани в непрекъснатата течна фаза. Течността се предполага вискозна и несвиваема, докато газът се предполага идеален. Процесът е екзотермичен с постоянно температурно поле.

Масовата плътност  $d_0$  на непрекъснатата фаза и  $d_1$  на диспергираната фаза се дават с равенствата

$$(1) \quad d_0 = (1 - \varphi)d_l,$$

$$(2) \quad d_1 = \varphi d_g,$$

където са използвани следните означения:

$\varphi$  — обемна плътност на газовите мехури в двуфазната среда,

$d_l$  — относителна плътност на течността,

$d_g$  — относителна плътност на газа.

Тогава общата масова плътност  $d$  се задава чрез равенството

$$(3) \quad d = d_0 + d_1.$$

Газо-течната среда се разглежда в рамките на двуконтинуалния модел, т. е. два несмесващи се, но взаимодействащи континуума. Така уравненията за запазване на масата и количеството на движение за двете среди имат вида

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla(\varphi W) = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t}(1 - \varphi) + \nabla[(1 - \varphi)U] = 0,$$

$$(6) \quad \varphi d_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} + W \cdot \nabla \right) W = f - \varphi d_1 \nabla \Pi,$$

$$(7) \quad (1 - \varphi)d_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V = \nabla \rho + \nabla(\mu \nabla V) - f - (1 - \varphi)d_0 \nabla \Pi,$$

където  $V$  е скоростта на непрекъснатата фаза (течността),  $W$  — скоростта на газовите мехури,  $\mu$  — динамичен вискозитет на течността и  $\Pi$  — гравитационен потенциал.

Силата на взаимодействие между газовата и течната фаза има следните компоненти:

архимедова сила

$$(8) \quad f_A = \varphi d_0 \left[ \nabla \Pi + \left( \frac{\partial}{\partial t} + W \cdot \nabla \right) W \right];$$

квазистоксова сила

$$(9) \quad f_S = \frac{9}{2} \varphi \cdot M(\varphi) \frac{\mu}{a^2} (V - W);$$

инерционни сили

$$(10) \quad f_I = \frac{3}{2} \varphi (1 - \varphi) \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{15}{4} M(\varphi) \right) \right] d \left( \frac{\partial}{\partial t} + W \cdot \nabla \right) (V - W);$$

сила на Басет

$$(11) \quad f_B = \varphi \left[ \frac{(1 - \varphi) M(\varphi)}{\pi} \right]^{0,5} \left( \frac{\mu d_0}{a^2} \right)^{0,5} \frac{9}{2} \int_{-\infty}^t \left( \frac{d}{dt} + W \right) (V - W) \frac{dt}{\sqrt{t - \tau}};$$

сила на Факсен

$$(12) \quad f_F = \frac{3}{4} \varphi \eta_0 \nabla [M(\varphi)(V - W)];$$

нелинейна сила

$$(13) \quad f_N = 6,46 \frac{3\varphi d_0}{4\pi\alpha} \left[ \mu M(\varphi) \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right| \right]^{0,5} (V - W) \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right).$$

Така

$$(14) \quad f = f_A + f_S + f_I + f_B + f_F + f_N.$$

Тук концентрационната константа е

$$(15) \quad M(\varphi) = \frac{1}{1 - 2,5\varphi}$$

за малки мехури с втвърдена повърхност и

$$(16) \quad M(\varphi) = \frac{1}{1 - \varphi}$$

за малки мехури със свободна повърхност.

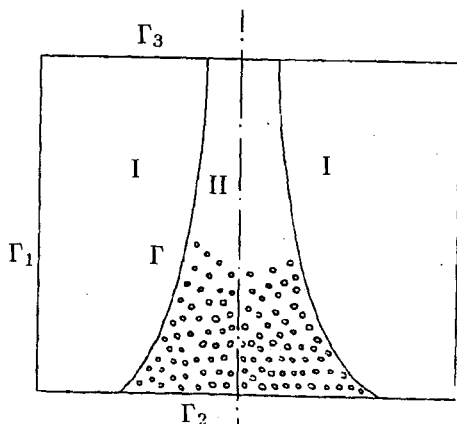
## ФОРМУЛИРАНЕ НА ПРОБЛЕМА

Изследва се динамиката на двуфазен поток в цилиндричен съд с радиус  $R$ , формиран при подаването на смес от газови мехури и вискозна течност с динамичен вискозитет  $\mu$  (фиг. 1). Предполага се, че двуфазната среда се подава отдолу от концентричен кръгов отвор с радиус  $R_1 < R$  със скорост  $V_0$ . Вискозитетът на флуида, запълващ съда, и този на флуида от двуфазния поток са равни.

В съда се оформят две зони:

зона I — запълнена с вискозна течност;

зона II — запълнена с двуфазна среда.



Фиг. 1

Ако означим с  $U$  скоростното поле на непрекъснатата фаза в зона I, то движението на флуида в тази зона ще се описва от системата уравнения на Навие—Стокс

$$(17) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}[(1 - \varphi)U] = 0,$$

$$(18) \quad (1 - \varphi)\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla \right) U = -\nabla \rho + \mu \Delta U.$$

Движението на двуфазната среда в зона II се описва от системата уравнения (4)–(7).

#### ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ

Коректната математическа постановка изисква да бъдат поставени съответните гранични условия за зони I и II. Ако се означат с  $\Gamma_1$  границата на зона I със стените на съда, с  $\Gamma_2$  — границата на зона II със съда, с  $\Gamma_3$  — свободната повърхност и с  $\Gamma$  — общата граница на двете зони, то:

по границата  $\Gamma_1$  се поставя условието за полепване, т. е.

$$(19) \quad U|_{\Gamma_1} = 0,$$

по границата  $\Gamma_2$  — условие за непротичане, т. е.

$$(20) \quad V|_{\Gamma_2} = V_0,$$

по границата  $\Gamma_3$  —

$$(21) \quad u_n|_{\Gamma_3} = v_n|_{\Gamma_3},$$

и по границата  $\Gamma$  — условие за взаимодействие на двете зони

$$(22) \quad v_t|_{\Gamma} = u_t|_{\Gamma}, \quad v_n|_{\Gamma} = (1 - \varphi)u_n|_{\Gamma}.$$

Така формулираната гранична задача за системите (4)–(7) и (17)–(18) със съответните гранични условия (19)–(22) е нестационарна от елиптически тип. Нейното числено реализиране представлява засега значителна трудност. При малки концентрации на подаваните газове мехури оформящият се двуфазен поток е с относително малка възходяща скорост. Ако се предположи, че процесът е стационарен и  $R \gg R_1$ , т. е. стените на съда са достатъчно далеко от двуфазния поток, то задачата може да се параболизира, като се използват уравненията за идеален флуид или уравненията за граничен слой. От друга страна, осовата симетрия на така поставената задача позволява тя да се разглежда в двумерна постановка. Това значително опростява числената схема и дава възможност за прилагане на маршовия метод за изчисляване на скоростното и концентрационните полета от слой към слой по дължина на двуфазния поток.

### ИДЕАЛЕН ФЛУИД

В рамките на модела за идеален флуид двуфазната среда се описва от следната система уравнения:

а) за непрекъснатата фаза:

$$(23) \quad \operatorname{div}[(1 - \varphi)V] = 0,$$

$$(24) \quad (1 - \varphi)d_0(V \cdot \nabla)V = -\nabla\rho - f;$$

б) за дисперсната фаза:

$$(25) \quad \operatorname{div}(\varphi W) = 0,$$

$$(26) \quad \varphi d_1(W \cdot \nabla)W = f - \varphi d_g.$$

Тъй като плътността на газа  $d_g$  е много малка по отношение на плътността на течността, то уравнение (26) може да се редуцира с достатъчно голяма точност до уравнението

$$(27) \quad f = 0.$$

Експерименталните наблюдения показват, че газовите мехурчета се движат стационарно и с малка скорост, чиято големина се изчислява по формулата на Стокс

$$(29) \quad W_0 = \frac{9}{2} \cdot \frac{ga^2 d_0}{\mu}.$$

Взаимодействието между мехурите и непрекъснатата фаза може да се пресметне от квазистоксовата сила

$$(30) \quad f_{QS} = \frac{9}{2} \varphi M(\varphi) \frac{\mu}{a^2} (U - W).$$

Допускането за малка относителна скорост на газовите мехури в дву-фазната среда ни дава основание да отчетем само архимедовата и квазистоксовата сила, т. е.

$$(31) \quad f = f_A + f_{Qs}.$$

#### ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ

През границата  $\Gamma$  се осъществява поток на флуид от зона I към зона II, което се описва от граничното условие

$$(32) \quad v_n|_{\Gamma} = (1 - \varphi)u_n|_{\Gamma}.$$

Граничното условие на  $\Gamma_2$  запазва вида си както по-горе:

$$(33) \quad V|_{\Gamma_2} = W|_{\Gamma_2} = V_0.$$

Тъй като непрекъснатата фаза е идеален флуид, то флуидът от зона II няма да влияе върху скоростното поле в зона I. Така задачата се свежда до изчисляване само на скоростното и концентрационното поле в зона II.

#### ЧИСЛЕНА РЕАЛИЗАЦИЯ

В двумерна постановка системата (23)–(27) има следната скаларна форма:

$$(34) \quad \varphi \left( \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + w_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + w_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$(35) \quad (1 - \varphi) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - u_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

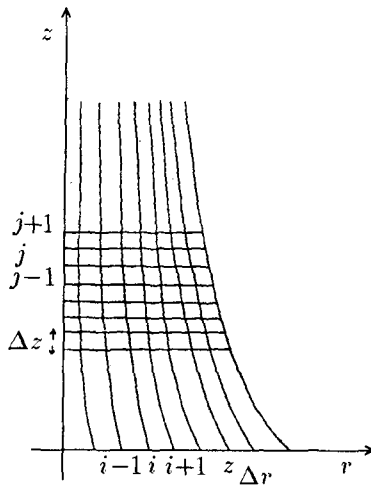
$$(36) \quad (1 - \varphi)d_0 \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial r} - f_r,$$

$$(37) \quad (1 - \varphi)d_0 \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial z} - f_z - \rho(1 - \varphi)g,$$

$$(38) \quad f_r = \varphi d_0 \left[ w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} \right] + \frac{9}{2} \varphi \frac{1}{1 - 2,5\varphi} \frac{\mu}{a^2} (u_r - w_r),$$

$$(39) \quad f_z = \varphi d_0 \left( -g + w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \frac{9}{2} \varphi \frac{1}{1 - 2,5\varphi} \frac{\mu}{a^2} (u_z - w_z).$$

За апроксимиране на горните уравнения в крайни разлики се използва мрежата, показана на фиг. 2. Тя е равномерна по  $z$  и неравномерна по  $r$ . Числената процедура се базира на решаването на системата (34)–(39),



Фиг. 2

записана в крайни разлики, както следва:

$$(40) \quad \varphi_{i,j} \left[ \frac{(w_r)_{i+1,j} - (w_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{(w_z)_{i,j+1} - (w_z)_{i,j}}{\Delta z} \right] + (w_r)_{i,j} \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\Delta r} + (w_z)_{i,j} \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta z} = 0,$$

$$(41) \quad (1 - \varphi_{i,j}) \left[ \frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{(u_z)_{i,j+1} - (u_z)_{i,j}}{\Delta z} \right] - (u_r)_{i,j} \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\Delta r} + (u_z)_{i,j} \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta z} = 0,$$

$$(42) \quad (1 - \varphi_{i,j}) d_0 \left[ (u_r)_{i,j} \frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} + (u_z)_{i,j} \frac{(u_r)_{i,j+1} - (u_r)_{i,j}}{\Delta z} \right] = -f_r,$$

$$(43) \quad (1 - \varphi_{i,j}) d_0 \left[ (u_r)_{i,j} \frac{(u_z)_{i+1,j} - (u_z)_{i-1,j}}{2\Delta r} + (u_z)_{i,j} \frac{(u_z)_{i,j+1} - (u_z)_{i,j}}{\Delta z} \right] = -f_z - d_0(1 - \varphi_{i,j})g,$$

$$(44) \quad (f_r)_{i,j} = \varphi_{i,j} d_0 \left[ (w_r) \frac{(w_r)_{i+1,j} - (w_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} + (w_z)_{i,j} \frac{(w_r)_{i,j+1} - (w_r)_{i,j}}{\Delta z} \right] + \frac{9}{2} \varphi_{i,j} \frac{1}{1 - 2,5\varphi_{i,j}} \frac{\mu}{a^2} [(u_r)_{i,j} - (w_r)_{i,j}],$$

$$(45) \quad (f_z)_{i,j} = \varphi_{i,j} d_0 \left[ (w_r) \frac{(w_z)_{i+1,j} - (w_z)_{i-1,j}}{2\Delta r} + (w_z)_{i,j} \frac{(w_z)_{i,j+1} - (w_z)_{i,j}}{\Delta z} \right]$$

$$+ \frac{9}{2} \varphi_{i,j} \frac{1}{1 - 2,5\varphi_{i,j}} \frac{\mu}{a^2} [(u_z)_{i,j} - (w_z)_{i,j}].$$

От тези уравнения се пресмятат стойностите на  $(j + 1)$ -вото ниво по следните производни формули:

$$(46) \quad (u_r)_{i,j+1} = \frac{\Delta z}{(u_z)_{i,j}} \left[ -\frac{f_r}{(1 - \varphi_{i,j})d_0} + (u_r)_{i,j} \frac{(u_z)_{i,j}^2}{(\Delta z)^2} - (u_r)_{i,j} \frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} \right],$$

$$(47) \quad (u_z)_{i,j+1} = \frac{\Delta z}{(u_z)_{i,j}} \left[ -\frac{f_z}{(1 - \varphi_{i,j})d_0} + (u_z)_{i,j} \frac{(u_z)_{i,j}^2}{(\Delta z)^2} - (u_r)_{i,j} \frac{(u_z)_{i+1,j} - (u_z)_{i-1,j}}{2\Delta r} - d_0(1 - \varphi_{i,j})g \right],$$

$$(48) \quad (w_r)_{i,j+1} = \frac{\Delta z}{(w_z)_{i,j}} \left\{ \left[ -\frac{9}{2} \frac{1}{1 - 2,5\varphi_{i,j}} \frac{\mu}{a^2} ((u_r)_{i,j} - (w_r)_{i,j}) + (f_r)_{i,j} \right] \frac{1}{\varphi_{i,j}d_0} - (w_r)_{i,j} \frac{(w_r)_{i+1,j} - (w_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{(w_z)_{i,j}(w_r)_{i,j}}{\Delta z} \right\},$$

$$(49) \quad (w_z)_{i,j+1} = \frac{\Delta z}{(w_z)_{i,j}} \left\{ \left[ -\frac{9}{2} \frac{1}{1 - 2,5\varphi_{i,j}} \frac{\mu}{a^2} ((u_z)_{i,j} - (w_z)_{i,j}) + (f_z)_{i,j} \right] \frac{1}{\varphi_{i,j}d_0} - (w_r)_{i,j} \frac{(w_z)_{i+1,j} - (w_z)_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{(w_z)_{i,j}(w_r)_{i,j}}{\Delta z} \right\},$$

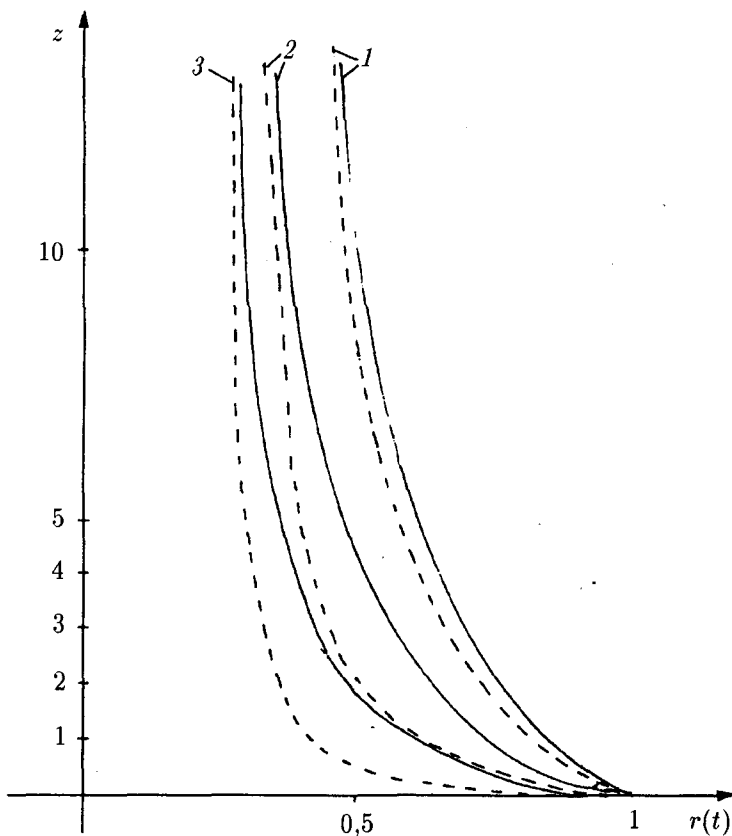
$$(50) \quad \varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j} - \left\{ \varphi_{i,j} \left[ \frac{(w_r)_{i+1,j} - (w_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{(u_z)_{i+1,j} - (u_z)_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{(w_z)_{i+1,j} - (w_z)_{i-1,j}}{2\Delta r} - \frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i-1,j}}{2\Delta r} - \frac{(u_z)_{i,j+1} - (u_z)_{i,j}}{\Delta z} + ((u_r)_{i,j} - (u_r)) \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\Delta r} \right] \frac{\Delta z}{(u_z)_{i,j} - (w_z)_{i,j}} \right\}.$$

Текущият радиус на формирания се възходящ двуфазен поток се получава от условието за запазване на количеството двуфазна среда, преминало през сечението на потока.

Въз основа на така описаната числена процедура могат да се изчислят скоростното и концентрационните полета на двуфазния поток, предизвикани от движението на дисперсната фаза по отношение на непрекъснатата фаза. Проведени са числени експерименти за отчитане на влиянието на диспергираната фаза върху вида на двуфазното течение и скоростното поле.

На фиг. 3 с прекъснатата линия е показан размерът на двуфазното течение за различни стойности на концентрация на диспергираната фаза (газовите мехури):  $\varphi = 0,01$  за крива 1,  $\varphi = 0,02$  за крива 2 и  $\varphi = 0,05$





Фиг. 3

за крива 3. Радиусът на газовите мехури е  $0,05$  cm, кинематичният вискозитет на течността е  $\nu = 0,25$   $\mu$ Pa и масовата плътност на течността е  $d_0 = 1,0$ . При така допуснатите величини числото на Рейнолдс има стойност  $Re = 0,436 < 0,5$ . Това дава основание да се разглежда относителното движение на газовите мехури като квазистоксово и скоростта, изчислена по формула (29), е  $W_0 = 2,18$  cm/s.

От фиг. 3 се вижда, че когато концентрацията на диспергираната фаза нараства, размерът на двуфазния поток намалява. Това се дължи на увеличената скорост на двуфазния поток вследствие на увеличената сила на взаимодействие между двете фази.

### ПРИБЛИЖЕНИЕ НА ГРАНИЧЕН СЛОЙ

Проведените числени експерименти в приближение на идеален флуид показват добри качествени резултати. Липсата на експерименти не дава възможност за тяхната количествена оценка. Допускането, че две-

те фази са идеален флуид, ограничава съществено неговото приложение при моделиране на реални процеси. За отчитане на взаимното влияние на флуидите от двете зони е необходимо да се приложи модел, отчитащ вискозността на флуидите. В зависимост от размера на двуфазния поток по отношение на общия обем са възможни два математически модела.

*Първи модел.* Диаметърът  $d$  на двуфазния поток е съизмерим с диаметъра  $D$  на цялата област. Влиянието на границите  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma$  се оказва съществено по отношение на динамиката на флуидите от двете зони и поставената задача трябва да се разглежда в пълна постановка с прилагане на уравненията на Навие—Стокс.

*Втори модел.* Диаметърът  $d$  на двуфазния поток е с порядъци по-малък от диаметъра  $D$  на цялата област. Тогава влиянието на границите  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  е несъществено и задачата може да се разглежда като външна задача. Това позволява тя да бъде параболизирана, като се приложи моделът на граничен слой, което съществено опростява числената реализация.

## УРАВНЕНИЯ НА ГРАНИЧЕН СЛОЙ ЗА ДВУФАЗЕН ОСОСИМЕТРИЧЕН СТАЦИОНАРЕН ПОТОК

При предположение, че  $d \ll D$  и дължината  $L$  на двуфазния поток в осово направление е съизмерима с характерния надлъжен мащаб, за който изменението на скоростта става с порядък и е много по-голям от неговия радиус, е възможна оценка на порядъците на отделните членове в уравненията (4)–(7). Това позволява да се отделят членовете от най-висок ред. Така се извеждат уравненията на граничен слой за непрекъснатата фаза в двуфазния поток, аналогични на известните уравнения на Прантъл за вискозен флуид

$$(51) \quad (1 - \varphi) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - u_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$(52) \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0,$$

$$(53) \quad (1 - \varphi) d_0 \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial z} - f_z - \rho(1 - \varphi)g.$$

Динамиката на дисперсната фаза (газовите мехурчета) се описва съответно чрез следната система уравнения:

$$(54) \quad \varphi \left( \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + w_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + w_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$(55) \quad f_r = \varphi d_0 \left( w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} \right) + \frac{9}{2} \varphi \frac{1}{1 - 2,5\varphi} \frac{\mu}{a^2} (u_r - w_r),$$

$$(56) \quad f_z = \varphi d_0 \left( -g + w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \frac{9}{2} \varphi \frac{1}{1 - 2,5\varphi} \frac{\mu}{a^2} (u_z - w_z).$$

При поставеното изискване за малки размери на газовите мехури и съответно малка относителна скорост  $W_0$  тя може да се пресметне по формулата на Стокс

$$(57) \quad W_0 = \frac{9 g \alpha^2 d_0}{2 \mu}.$$

Взаимодействието на газовите мехури с флуида се осъществява чрез квазистоксовата сила

$$(58) \quad f_{QS} = \frac{9}{2} \varphi M(\varphi) \frac{\mu}{\alpha^2} (U - W).$$

Малката относителна скорост на газовите мехурчета и на двуфазния поток като цяло дават основание да се вземат под внимание само архимедовата и квазистоксовата сила.

Вискозното взаимодействие на двуфазния поток и окръжаващата непрекъснатата фаза предизвиква развитието на стационарен граничен слой в последната. Нейната динамика се описва от известните уравнения на Прантъл за цилиндрична координатна система в двумерна постановка

$$(59) \quad \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z) = 0,$$

$$(60) \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0,$$

$$(61) \quad u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_z) \pm g.$$

#### ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ

Върху  $\Gamma_2$  се предполага изпълнено следното общо условие:

$$(62) \quad U|_{\Gamma_2} = V|_{\Gamma_2} = W|_{\Gamma_2} = u_z^0.$$

През границата  $\Gamma$  се осъществява поток на непрекъснатата фаза от зона I към зона II, т. е.

$$(63) \quad v_n|_{\Gamma} = (1 - \varphi)u_n|_{\Gamma},$$

и съвпадение на тангенциалните скорости

$$(64) \quad v_t|_{\Gamma} = u_t|_{\Gamma}.$$

На оста на двуфазния поток, т. е. при  $r = 0$ , трябва да се поставят условие за симетрия на скоростния профил

$$(65) \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$

и условие за устойчивост на потока

$$(66) \quad v_r = 0.$$

Системата уравнения (59)–(61) заедно с граничните условия (62)–(66) формират гранична задача от параболичен тип. От уравнение (60) следва, че налягането не се променя в хоризонтално направление и то е равно на хидростатичното налягане  $\rho = dgz$ . Това позволява то да бъде изключено от уравненията за движение. Така те добиват следния вид:

за непрекъснатата фаза в зона I

$$(67) \quad u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_z) - 2g,$$

за непрекъснатата фаза в зона II

$$(68) \quad (1 - \varphi) \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -g + \mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_z) - f_z - (1 - \varphi)g.$$

За численото решаване на така поставената задача е удобно да се приложи методът на непрекъснатото интегриране през границата Г. За целта уравненията на движение (67) и (68) се записват в общ вид, както следва

$$(69) \quad (1 - \varphi k) \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -g + \mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_z) - (1 - k)f_z - (1 - \varphi k)g,$$

където  $k = 0$  за зона I и  $k = 1$  за зона II.

Двумерността на задачата позволява да се въведе функция на тока  $\psi$ , която удовлетворява уравнението на непрекъснатостта чрез следните равенства:

$$(70) \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Така обобщената система уравнения на граничния слой (59), (60) и (69) се свежда до следната система уравнения:

$$(71) \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$(72) \quad (1 - \varphi k) \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -g + \mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_z) - (1 - k)f_z - (1 - \varphi k)g,$$

За получаване на консервативна разностна апроксимация на диференциалния оператор по  $r$  уравнение (72) се привежда в следния дивергентен вид след съответно обезразмеряване:

$$(73) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\text{Re}} r \frac{\partial V}{\partial r} + V \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - 2V \frac{\partial V}{\partial z} = (1 - k)f_z + (1 - \varphi k) \frac{1}{\text{Fr}},$$

където  $\text{Re}$  и  $\text{Fr}$  са познатите числа на Рейнолдс и Фрут.

Апроксимирането на (73) в крайни разлики се извършва върху мрежата, показана на фиг. 2, която следва формата на двуфазния поток. Така

тя се получава неравномерна по  $r$  и равномерна по  $z$ , като големината на интервала по  $r$  се определя от текущия радиус на зона II. Използуваната разностна схема е неявна по  $z$ , а параболичността на уравненията позволява тяхното интегриране от слой към слой. Съществуващата нелинейност в уравнението не позволява да се приложат методите на линейната алгебра за решаване на получената система нелинейни алгебрични уравнения. Това налага нейното линеаризиране и прилагане на итерационна процедура за намиране на решението. За начални стойности на итерационния процес се използват стойностите на  $V$  и  $\psi$  от предния слой. Нелинейността на мрежата по  $r$  изисква нелинейно триточково интерполиране на стойностите от предишния слой, което запазва точността на схемата.

В  $i$ -тата точка на слоя  $j$  се използват следните апроксимации в централни разлики по  $r$ :

$$(74) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\text{Re}} r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{1}{\text{Re}_{i-1/2}} \frac{r_{i-1/2}}{r_i} V_{l,i-1}^j - \left( \frac{1}{\text{Re}_{i-1/2}} \frac{r_{i-1/2}}{r_i} V_{l,i-1}^j + \frac{1}{\text{Re}_{i+1/2}} \frac{r_{i+1/2}}{r_i} V_{l,i}^j \right) V_{l,i}^j + \frac{1}{\text{Re}_{i+1/2}} \frac{r_{i+1/2}}{r_i} V_{l,i+1}^j \right\},$$

$$(75) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( V \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{1}{r_i} \frac{1}{2h} \left[ V_{l,i+1}^j \frac{\partial \psi_{l-1}}{\partial z} - V_{l,i-1}^j \frac{\partial \psi_{l-1}}{\partial z} \right].$$

По този начин уравнение (73) се замества от следната система линейни алгебрични уравнения:

$$(76) \quad A_{l-1,i} V_{l,i-1}^j + C_{l-1,i} V_{l,i}^j + B_{l+1,i+1}^j V_{l,i+1}^j = F_{l-1,i},$$

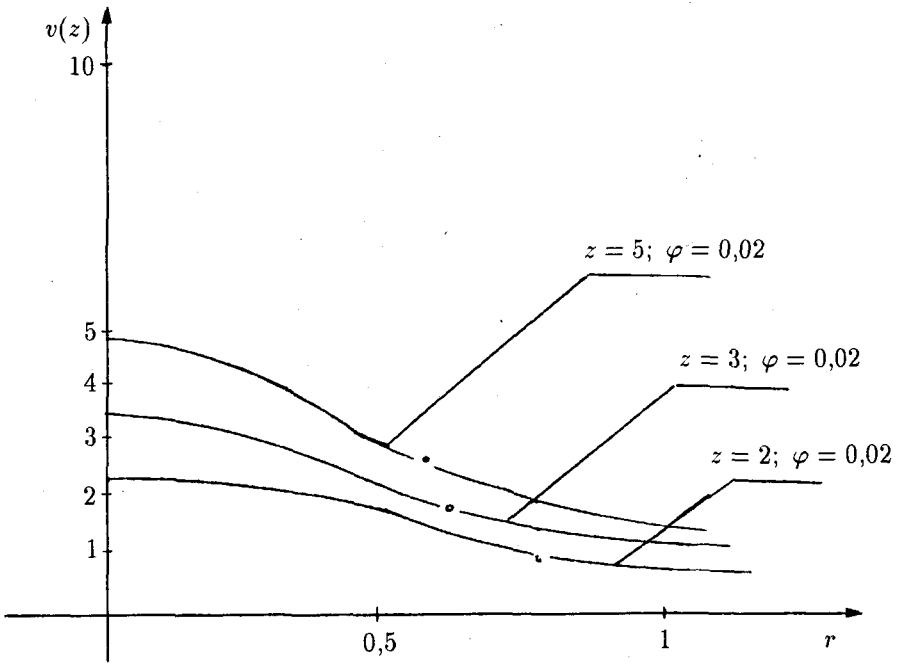
където  $l$  означава номера на итерацията.

Матрицата на така получената система линейни алгебрични уравнения е тридиагонална. За нейното решаване се прилага гаусова процедура, като се следи програмно за нейната устойчивост.

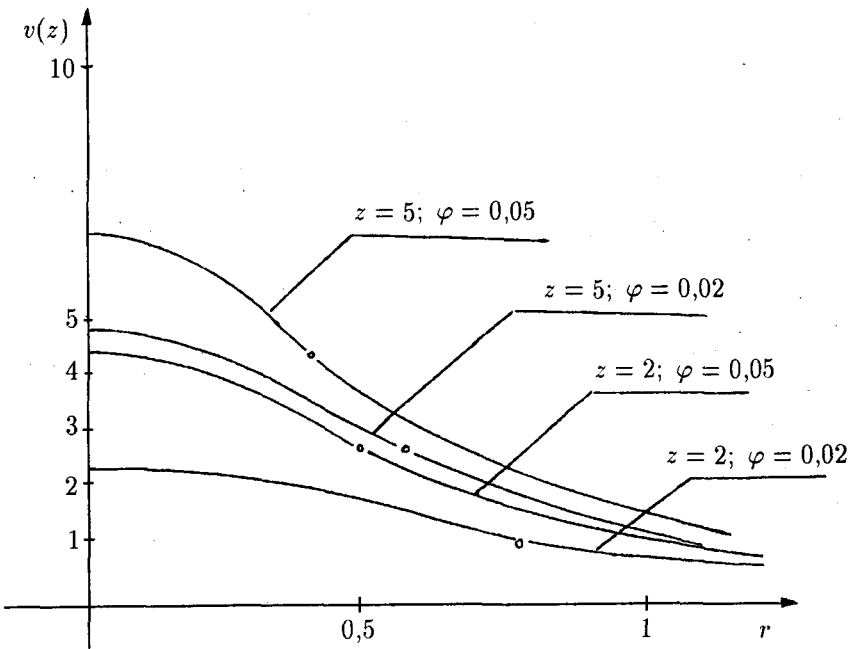
Текущият радиус на двуфазния поток се определя по метода на стрелбата, като се изисква да бъде изпълнено условието за запазване на количеството флуид, преминал до момента през границите  $\Gamma$  и  $\Gamma_2$ . Това се осъществява, като по даден радиус на двуфазния поток се пресмята скоростният профил и оттам потокът  $Q(R)$ . При неправилно зададен радиус  $R$  потокът  $Q(R)$  е различен от количеството течност  $Q$ , преминала до момента. Необходимата корекция се пресмята от условието  $F(R) = Q(R) - Q = 0$ . За целта  $F(R + \Delta R)$  се развива в ред на Тейлор:

$$(77) \quad F(R + \Delta R) = F(R) + \Delta R \frac{dF}{dR} + \frac{(\Delta R)^2}{2!} \frac{d^2 F}{dR^2} + \dots,$$

и се търси такова  $\Delta R$ , че  $F(R + \Delta R) = 0$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Ако се ограничим с линейната част от реда на Тейлор за корекцията  $\Delta R$ , се получава уравнението

$$(78) \quad F(R) + \Delta R \frac{dF(R)}{dR} = 0.$$

За пресмятане на  $\frac{dF(R)}{dR}$  се налага да се пресметнат стойностите на функцията  $F(R)$  за две близки стойности на  $R$ .

#### ЧИСЛЕНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ И ИЗВОДИ

Описаният алгоритъм е реализиран програмно на FORTRAN и са направени редица числени експерименти, като са използвани стъпки в двете направления съответно  $\Delta R = 0,025$ ,  $\Delta z = 0,05$ .

Изискваната точност при определяне на радиуса по метода на стрелбата е  $1.10^{-3}$ , а точността за прекратяване на итерационния процес е  $1.10^{-4}$ .

Направените числени експерименти са за модела на газови мехури с твърда граница, при които обемният коефициент  $M(\varphi)$  се изчислява по формула (15), и съответствуват на числените експерименти в постановка за идеален флуид при примерни концентрации на газовите мехури съответно 0,01, 0,02 и 0,05.

Размерът на двуфазния поток е приведен графично на фиг. 3 с плътни линии.

На фиг. 4 са приведени скоростните профили на двуфазната среда и окръжаващата непрекъсната фаза на разстояние съответно  $z = 2,3$  и 5 радиуса  $R$  от границата  $\Gamma_2$ . На фиг. 5 са приведени скоростните профили за различна концентрация на газовите мехурчета. На фиг. 4 и 5 точките означават границата на двуфазния поток.

В резултат на проведения сравнителен анализ могат да се направят следните изводи:

1. Прилагането на модела за граничен слой, който отчита вискозното взаимодействие на двете зони, води до разширяване на зона II в сравнение с резултатите, получени при прилагане на модела за идеален флуид.

2. Средната масова скорост в зона II е по-ниска в сравнение с постановката за идеален флуид.

3. По-голямата концентрация на дисперсната фаза води до по-бързото оформяне на параболичен скоростен профил в зона II.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Drew, D. A. Mathematical modeling of two-phase flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15, 1983, 261–291.

2. Wijngaarden, L. V. Some problems in the formulation of the equations for gas-liquid flows. *Theor. and Appl. Mech.*, North-Holland Publishing Company, 1976, 249–260.
3. Rietema, K. Science and technology of dispersed two-phase systems. *Chem. Engin. Sci.*, **37**, 1982, 1125–1150.
4. Буевич, Ю., А. Зубарев, А. Исаев. О гидромеханике суспензий. *Инж. физ. журнал*, **57** (3), 1989.
5. Bozdouganov, I., Z. Zapryanov, Yu. Buyevich. Numerical modeling of gas-liquid flow. *Theor. and Appl. Mech.*, **1**, 1993.

*Поступила 21.02.1994*