ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 88, 1994

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 88, 1994

QUELQUES MODELES DE TEMPERATURE D'ASPERITES PAR FROTTEMENT

VASSIL DIAMANDIEV

Васил Диамандиев. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ТЕМПЕРАТУРЫ ВЫСТУПОВ ПРИ ТРЕНИИ

В настоящей работе обобщается модель температуры выступов, данная *Чичинадзе, Гинсбурге* [2]. В работе [2] рассмотрена проблема о температуре при двух гипотезах: 1) размеры тел, перпендикулярные поверхности трения, бесконечные; 2) тепловой поток трения постоянный. В данной статье эти две гипотезы обобщаются и тепловой поток рассмотрен как линейная функция времени. Представлена ещё отдельная модель, в которой делается тепловой баланс одного выступа и получается соответствующая температура. Полученные результаты могут найти применение в машиностроении.

Vassil Diamandiev. ON SOME MODELS OF TEMPERATURE OF ASPERITIES AT FRICTION

In this paper we generalize the model of temperature of asperities given by *Chichinadze, Ginzburg* [2]. In the paper [2] the problem of temperature is considered at the assumption of two hypotheses: 1) The dimensions of the bodies which are perpendicular to the friction surface are infinite; 2) The termal flux of the friction is constant. In the present paper both restrictions are generalized and the termal flux is taken to be a linear function of time. A model of a single asperity for which the termal balance is given and its temperature is directly determined is developed.

Il est notoire que les surfaces des corps flottants sont rugueses avec un nombre des aspérités. La température des surfaces flottantes peut se mesurer avec un instrument convenable. Mais pour les aspérités cette méthode expérimentale n'est pas possible à cause de leurs dimensions microscopiques [1]. Voilà pourquoi le calcul théorique de la température des aspérités a une grande signification pratique. Un grand nombre d'auteurs comme *Tchitchinadze, Ginzbourg* [2], *Block, Jaeger* [10], *Holm* etc. considèrent ce problème et obtiennent des formules respectives pour la température.

Dans l'ouvrage [2] on détermine la température des aspérités par deux hypothèses : 1) les dimensions des corps perpendiculairement du plan du frottement sont infinies; 2) le flux thermique du frottement est constant. Dans notre article on considère le problème quand les dimensions des corps sont finies et d'autre part quand le flux thermique est variable, en particulier il est une fonction linéaire du temps. Des formules dans notre article obtiennent en particulier les résultats de l'ouvrage [2]. Le modèle considéré ne prend pas en considération la pluralité des aspérités [11] et la question de l'usure.

1. TEMPÉRATURE D'ASPÉRITÉS PAR DIMENSIONS FINIES DES CORPS ET FLUX THERMIQUE CONSTANT

On prend le schéma de l'ouvrage [2]. On considère le prolongement de l'aspérité comme une perche avec une longueur l_1 (non infinie). L'aspérité se frotte sur la surface de l'autre corps qui a une longueur l_2. On accepte que la diffusion de la chaleur est seulement verticalement de la surface du frottement. Par ces conditions le problème thermique se pose ainsi: il faut résoudre les équations de Fourier

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} \tag{1}$$

aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} &\theta_1(z,\, 0) = 0, \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z}(0,\, t) = -q_1, \quad \theta_1(l_1,\, t) = 0, \\ &\theta_2(z,\, 0) = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z}(0,\, t) = q_2, \quad \theta_2(-l_2,\, t) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

où $\theta_1(z,\, t)$, $\theta_2(z,\, t)$ sont les champs thermiques en deux corps, λ_1, λ_2 — les coefficients de la conductivité thermique, q_1, q_2 — les flux thermiques qui s'obtiennent de la puissance du frottement q par une unité de sa surface.

Par une manière connue [9] on obtient les formules suivantes pour la température:

$$\begin{aligned} \theta_1(z,\, t) &= \frac{q_1}{\lambda_1} \left[l_1 - z - \frac{8 l_1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi z (2m+1)}{2 l_1}}{(2m+1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a_1 (2m+1)^2}{4 l_1^2} t} \right], \quad z \geqq 0, \\ \theta_2(z,\, t) &= \frac{q_2}{\lambda_2} \left[l_2 + z - \frac{8 l_2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi z (2m+1)}{2 l_2}}{(2m+1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a_2 (2m+1)^2}{4 l_2^2} t} \right], \quad z \leqq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Maintenant nous trouverons une formule approximative pour les séries en (4). Il est évident que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-k(2m+1)^2}}{(2m+1)^2}, \quad k > 0, \tag{4}$$

est convergente uniformément et par conséquent on peut différencier leur somme par rapport a k, c.-à.-d. on a

(5) $$F(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-k(2m+1)^2}}{(2m+1)^2},$$

(6) $$F'(k) = -\sum_{m=0}^{\infty} e^{-k(2m+1)^2}.$$

On exprime la somme $\sum\limits_{m=0}^{\infty} e^{-k(2m+1)^2}$ approximativement par une intégrale définie, c.-à.-d. on obtient

(7) $$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-k(2m+1)^2} \approx \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{k}} - \frac{1}{2}.$$

Des relations (6) et (7) on trouve

(8) $$F(k) = C - \frac{1}{2}\sqrt{\pi k} + \frac{1}{2}k$$

où C est une constante indéfinie. Mais selon (5) on obtient [3]

$$F(0) = C = \frac{\pi^2}{8}.$$

Par cette manière on trouve la formule approximative

(9) $$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-k(2m+1)^2}}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi k} + \frac{1}{2}k.$$

On applique (9) pour les équations (4) et on trouve les formules approximatives

(10) $$\theta_1(0,\, t) = \frac{q_1}{\lambda_1}\left[2\sqrt{\frac{a_1 t}{\pi}} - \frac{a_1 t}{l_1}\right],$$
$$\theta_2(0,\, t) = \frac{q_2}{\lambda_2}\left[2\sqrt{\frac{a_2 t}{\pi}} - \frac{a_2 t}{l_2}\right].$$

Selon le schéma de l'ouvrage [2] on prend la température pour un petit intervalle du temps. Pour l'aspérité on prend $0 \leqq t \leqq \dfrac{L_r}{v}$ où L_r est la route du frottement de l'aspérité jusqu'à leur existence et v — la vitesse du glissement. Pour la surface immobile on prend $0 \leqq t \leqq \dfrac{d_r}{v}$ où d_r est la dimension moyenne de l'aspérité. Pour la température maximale on obtient de (10)

(11) $$\theta_{1\,\max} = \frac{q_1}{\lambda_1}\left[2\sqrt{\frac{a_1 L_r}{\pi v}} - \frac{a_1 L_r}{l_1 v}\right],$$
$$\theta_{2\,\max} = \frac{q_2}{\lambda_2}\left[2\sqrt{\frac{a_2 d_r}{\pi v}} - \frac{a_2 d_r}{l_2 v}\right].$$

Les flux thermiques se déterminent des relations

$$q_1 = (1-\alpha)q, \quad q_2 = \alpha q \tag{12}$$

où α est une constante. Puisque il n'y a pas un saut aux températures, c.-à.-d. $\theta_{1\,\max} = \theta_{2\,\max}$, de (11) on obtient

$$\alpha = \frac{\lambda_2\left[2\sqrt{\frac{a_1 L_r}{\pi v}} - \frac{a_1 L_r}{l_1 v}\right]}{\lambda_1\left[2\sqrt{\frac{a_2 d_r}{\pi v}} - \frac{a_2 d_r}{l_2 v}\right] + \lambda_2\left[2\sqrt{\frac{a_1 L_r}{\pi v}} - \frac{a_1 L_r}{l_1 v}\right]}. \tag{13}$$

On remplace (12), (13) en (11) et on trouve pour la température máximale

$$\theta_{\max} = \frac{q\left[2\sqrt{\frac{a_1 L_r}{\pi v}} - \frac{a_1 L_r}{l_1 v}\right]\left[2\sqrt{\frac{a_2 d_r}{\pi v}} - \frac{a_2 d_r}{l_2 v}\right]}{\lambda_1\left[2\sqrt{\frac{a_2 d_r}{\pi v}} - \frac{a_2 d_r}{l_2 v}\right] + \lambda_2\left[2\sqrt{\frac{a_1 L_r}{\pi v}} - \frac{a_1 L_r}{l_1 v}\right]}. \tag{14}$$

Quand les dimensions des corps sont infinies, c.-à.-d. $l_1 = l_2 = \infty$, on obtient de (14) la formule de *Tchitchinadze, Ginzbourg* [2]:

$$\theta_{\max} = \frac{2q\sqrt{a_1 a_2 L_r d_r}}{\sqrt{\pi v}[\lambda_1\sqrt{a_2 d_r} + \lambda_2\sqrt{a_1 L_r}]}. \tag{15}$$

On détermine la puissance du frottement par une unité de la surface q qui se forme sur une aspérité. La grandeur q s'obtient comme une transformation de l'énergie mécanique du frottement en une énergie thermique par l'équivalent respectif de la chaleur. Ayant en vue cette conception on trouve

$$q = \frac{Jf\Delta N.v}{d_r^2}. \tag{16}$$

où J est l'équivalent thermique de l'énergie mécanique, f — le coefficient du frottement, ΔN — la charge sur une aspérité; d_r^2 est la surface d'une aspérité que nous acceptons pour un carré.

On suppose que la charge totale N se distribue uniformément à toutes les aspérités, c.-à.-d.

$$\Delta N = \frac{N}{n}, \tag{17}$$

où n est le nombre des aspérités sur la surface totale. On note que la relation (17) est approximative. Evidemment la surface réelle du contact A_r se donne par la formule

$$A_r = nd_r^2. \tag{18}$$

Selon (16) — (18) on obtient définitivement

$$q = \frac{JfNv}{A_r}\,\frac{\text{cal}}{\text{s cm}^2}. \tag{19}$$

On prend un exemple numérique. On a les données suivantes:

$$J = \frac{10^{-4}}{4.27}\frac{\text{cal}}{\text{kg cm}}, \quad f = 0.1, \quad N = 500 \text{ kg}, \quad v = 2500 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.08 \times 10^{-9} \ \frac{\text{cal}}{\text{cm s grad}}, \quad a_1 = a_2 = 0.125\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \ \text{(pour acier)},$$

$$l_1 = l_2 = 100 \text{ cm}, \quad L_r = 2.2 \times 10^{-2}\text{cm}, \quad d_r = 2.2 \times 10^{-3}\text{cm}.$$

De la formule (19) on trouve

$$q = \frac{2.927}{A_r}\frac{\text{cal}}{\text{s cm}^2}. \tag{20}$$

On remplace (20) en (14) pour les données et on obtient

$$\theta_{\max} = \frac{6.9}{A_r}. \tag{20'}$$

La relation (20′) montre que la température d'une aspérité dépend de la surface réelle du contact, c.-à.-d. de la surface nominale.

Quand $A_r = 2.10^{-2}$ cm^2 de (20′) on trouve $\theta_{max} = 345°$.

Ce résultat est proche de la température d'une brûlure de l'aspérité, c.-à.-d. les données pour L_r et d_r sont choisies d'une manière convenable pour cet exemple.

2. TEMPÉRATURE D'ASPÉRITÉS PAR DIMENSIONS FINIES DES CORPS ET PAR FLUX THERMIQUE VARIABLE

Par le freinage le flux thermique peut devenir une fonction du temps quand la charge totale N est variable. En particulier on accepte que N est une fonction linéaire du temps et selon la formule (19) q est la même fonction du temps, c.-à.-d. on a

$$q = \frac{Jfv(N_0 + N_1 t)}{A_r}, \tag{21}$$

ou on a

$$q = q' + q''t,$$

où q' et q'' selon (21) sont

$$q' = \frac{JfvN_0}{A_r}, \quad q'' = \frac{JfvN_1}{A_r}. \tag{22}$$

Maintenant le problème thermique des corps frottants se pose ainsi: déterminer les champs thermiques par rapport les équations (1) aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} &\theta_1(z,\, 0) = 0, \quad \lambda_1\frac{\partial\theta_1}{\partial z}(0,\, t) = -(1-\alpha)(q' + q''t), \quad \theta_1(l_1,\, t) = 0, \\ &\theta_2(z,\, 0) = 0, \quad \lambda_2\frac{\partial\theta_2}{\partial z}(0,\, t) = \alpha(q' + q''t), \quad \theta_2(-l_2,\, t) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Ici on accepte que la température de l'environnement est zéro.

On applique la méthode de Heaviside sur ce problème mathématique. Nous considérons seulement les formules pour la température $\theta_1(z, t)$; pour $\theta_2(z, t)$ ils sont analogiques. De (1) on obtient [4]

$$\theta_{1L}(z, s) = B_1(s)e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z} + B_2(s)e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}}z}, \quad z \geqq 0, \tag{24}$$

où

$$\theta_{1L}(z, s) = \int_0^\infty e^{-st}\theta_1(z, t)dt. \tag{25}$$

On applique la dernière condition en (23) à (24) et on trouve

$$B_1(s)e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}l_1} + B_2(s)e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}}l_1} = 0. \tag{26}$$

De (24) et (26) on obtient

$$\theta_1(z, t) = L^{-1}\left[B_1(s)\left\{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}\right\}\right] \tag{27}$$

où L^{-1} est l'opérateur inverse de Laplace. De (27) et la deuxième condition de (23) on trouve

$$L^{-1}\left\{B_1(s)\sqrt{\frac{s}{a_1}}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)\right\} = \frac{(1-\alpha)(q'+q''t)}{\lambda_1}. \tag{28}$$

On prend l'opérateur de Laplace à (28) et on obtient

$$B_1(s) = \frac{(1-\alpha)\sqrt{a_1}}{\lambda_1}\left[\frac{q'}{s^{3/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)} + \frac{q''}{s^{5/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}\right]. \tag{29}$$

De (26) et (29) on trouve

$$B_2(s) = -\frac{(1-\alpha)\sqrt{a_1}}{\lambda_1}\left[\frac{q'e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}}{s^{3/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)} + \frac{q''e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}}{s^{5/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}\right]. \tag{30}$$

On remplace (29) et (30) en (24) et on obtient

$$\theta_{1L}(z,\, s) = \frac{(1-\alpha)\sqrt{a_1}}{\lambda_1}\left[\frac{q'\left(e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}\right)}{s^{3/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)} + \frac{q''\left(e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}\right)}{s^{5/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}\right]. \tag{31}$$

On prend l'opérateur inverse de Laplace a (31) et on trouve

$$\theta_1(z,\, t) = \frac{(1-\alpha)\sqrt{a_1}}{\lambda_1}\left[q' L^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}}{s^{3/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}\right\} + q'' L^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}}{s^{5/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}\right\}\right]. \tag{32}$$

On applique le théorème du retournement [5] à (32), c.-à.-d. on a

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}}{s^{3/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\gamma-i\omega\\ \omega\to\infty}}^{\gamma+i\omega} e^{st}\,\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}}{s^{3/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}\,ds, \tag{33}$$

$$
(34)\quad L^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z}-e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}}{s^{5/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\gamma-i\omega\\ \omega\to\infty}}^{\gamma+i\omega} e^{st}\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z}-e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}}{s^{5/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}ds,
$$

où γ et ω sont des nombres réels et positifs. Pour le calcul de l'intégrales en (33), (34) on fait une intégration dans un domaine complexe sur un contour représentant le droit $x = \gamma$ et la circonférence (c) avec un centre $O(0,\ 0)$ et un rayon $R \to \infty$ [5]. On applique le théorème des résidus [6] sur le contour donné.

Les pôles des fonctions en (33), (34) sont

$$
(35)\qquad s = 0,\quad s_m = -\frac{\pi^2 a_1}{4l_1^2}(2m+1)^2 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).
$$

Pour les résidus de ces fonctions on a respectivement

$$
(36)\qquad \mathrm{Res}(0) = \frac{l_1 - z}{\sqrt{a_1}},\quad \mathrm{Res}(s_m) = -\frac{8l_1\cos\frac{\pi z}{2l_1}(2m+1)}{\pi^2\sqrt{a_1}(2m+1)^2}e^{-\frac{\pi^2 a_1(2m+1)^2}{4l_1^2}t}
$$

pour la fonction en (33),

$$
(37)\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(0) &= \frac{1}{a_1^{3/2}}\left(-\frac{1}{3}l_1^3 + \frac{1}{2}l_1 z^2 - \frac{1}{6}z^3\right),\\
\mathrm{Res}(s_m) &= \frac{32 l_1^3\cos\frac{\pi z}{2l_1}(2m+1)}{\pi^4 a_1^{3/2}(2m+1)^4}e^{-\frac{\pi^2 a_1(2m+1)^2}{4l_1^2}t}
\end{aligned}
$$

pour la fonction en (34).

Pour les intégrales dans le domaine complexe on obtient

$$
(38)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\gamma-i\omega\\ \omega\to\infty}}^{\gamma+i\omega} e^{st}\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z}-e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}}{s^{3/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}ds\\
&=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\left[l_1 - z - \frac{8l_1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi z}{2l_1}(2m+1)}{(2m+1)^2}e^{-\frac{\pi^2 a_1(2m+1)^2}{4l_1^2}t}\right]
\end{aligned}
$$

et respectivement

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\gamma-i\omega\\ \omega\to\infty}}^{\gamma+i\omega} e^{st}\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}z}-e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-z)}}{s^{5/2}\left(1+e^{-2l_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}}\right)}ds \tag{39}$$

$$=\frac{1}{a_1^{3/2}}\left[-\frac{1}{3}l_1^3+\frac{1}{2}l_1z^2-\frac{1}{6}z^3+\frac{32l_1^3}{\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi z}{2l_1}(2m+1)}{(2m+1)^4}e^{-\frac{\pi^2 a_1(2m+1)^2}{4l_1^2}t}\right].$$

Selon (32)-(34), (38) et (39) on trouve définitivement

$$\theta_1(z,\,t)=\frac{1-\alpha}{\lambda_1}\left[q'\left\{l_1-z-\frac{8l_1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi z}{2l_1}(2m+1)}{(2m+1)^2}e^{-\frac{\pi^2 a_1(2m+1)^2}{4l_1^2}t}\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{q''}{a_1}\left\{\frac{1}{3}l_1^3-\frac{1}{2}l_1z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{32l_1^3}{\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi z}{2l_1}(2m+1)}{(2m+1)^4}e^{-\frac{\pi^2 a_1(2m+1)^2}{4l_1^2}t}\right\}\right]. \tag{40}$$

La température de la surface frottante s'obtient par $z=0$ dans l'équation (40), c.-à.-d. on a

$$\theta_1(0,\,t)=\frac{(1-\alpha)l_1}{\lambda_1}\left[q'\left\{1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi^2 a_1(2m+1)^2}{4l_1^2}t}}{(2m+1)^2}\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{q''l_1^2}{3a_1}\left\{1-\frac{96}{\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi^2 a_1(2m+1)^2}{4l_1^2}t}}{(2m+1)^4}\right\}\right]. \tag{41}$$

Analogiquement pour la température de la surface immobile on a

$$\theta_2(0,\,t)=\frac{\alpha l_2}{\lambda_2}\left[q'\left\{1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi^2 a_2(2m+1)^2}{4l_2^2}t}}{(2m+1)^2}\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{q''l_2^2}{3a_2}\left\{1-\frac{96}{\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi^2 a_2(2m+1)^2}{4l_2^2}t}}{(2m+1)^4}\right\}\right]. \tag{42}$$

On considére la somme

$$\Phi(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-k(2m+1)^2}}{(2m+1)^4} \tag{43}$$

qui est convergente uniformément. On différencie la fonction (43) par rapport à k et on trouve

$$\Phi'(k) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-k(2m+1)^2}}{(2m+1)^2}. \tag{44}$$

On utilise la formule approximative (9) et on obtient de (44)

$$\Phi'(k) = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi k} - \frac{1}{2}k. \tag{45}$$

On intègre (45) et on trouve

$$\Phi(k) = C - \frac{\pi^2}{8}k + \frac{1}{3}\sqrt{\pi}.k^{3/2} - \frac{1}{4}k^2. \tag{46}$$

Evidemment [3]

$$\Phi(0) = C = \frac{\pi^4}{96}.$$

De cette manière nous obtenons une nouvelle formule approximative

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-k(2m+1)^2}}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi^2}{8}k + \frac{\sqrt{\pi}}{3}k^{3/2} - \frac{1}{4}k^2. \tag{47}$$

Selon les formules (9) et (47) nous obtenons de (41) la formule suivante:

$$\theta_1(0,\, t) = \frac{1-\alpha}{\lambda_1}\left[q'\left\{2\sqrt{\frac{a_1 t}{\pi}} - \frac{a_1 t}{l_1}\right\} - q''\left\{l_1 t - \frac{4\sqrt{a_1}}{3\sqrt{\pi}}.t^{3/2} + \frac{1}{2}\frac{a_1 t^2}{l_1}\right\}\right]. \tag{48}$$

Analogiquement on a

$$\theta_2(0,\, t) = \frac{\alpha}{\lambda_2}\left[q'\left\{2\sqrt{\frac{a_2 t}{\pi}} - \frac{a_2 t}{l_2}\right\} - q''\left\{l_2 t - \frac{4\sqrt{a_2}}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2} + \frac{1}{2}\frac{a_2 t^2}{l_2}\right\}\right]. \tag{49}$$

Selon le schéma de l'ouvrage [2] on prend $t = \dfrac{L_r}{v}$ pour la température $\theta_1(0,\, t)$ et $t = \dfrac{d_r}{v}$ pour $\theta_2(0,\, t)$. Ainsi on obtient pour les températures maximales:

(50)

$$\theta_{1\,\max} = \frac{1-\alpha}{\lambda_1}\left[q'\left\{2\sqrt{\frac{a_1 L_r}{\pi v}} - \frac{a_1 L_r}{l_1 v}\right\} - q''\left\{\frac{l_1 L_r}{v} - \frac{4\sqrt{a_1}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{L_r}{v}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\frac{a_1}{l_1}\left(\frac{L_r}{v}\right)^2\right\}\right],$$

$$\theta_{2\,\max} = \frac{\alpha}{\lambda_2}\left[q'\left\{2\sqrt{\frac{a_2 d_r}{\pi v}} - \frac{a_2 d_r}{l_2 v}\right\} - q''\left\{\frac{l_2 d_r}{v} - \frac{4\sqrt{a_2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{d_r}{v}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{l_2}\left(\frac{d_r}{v}\right)^2\right\}\right].$$

Puisqu'il n'y a pas un saut aux températures, c.-à.-d. $\theta_{1\,\max} = \theta_{2\,\max}$ pour la grandeur α on trouve

(51) $$\alpha = \frac{\lambda_2 A}{\lambda_1 B + \lambda_2 A}$$

où les grandeurs A et B sont

(52) $$\begin{aligned} A &= q'\left\{2\sqrt{\frac{a_1 L_r}{\pi v}} - \frac{a_1 L_r}{l_1 v}\right\} - q''\left\{\frac{l_1 L_r}{v} - \frac{4\sqrt{a_1}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{L_r}{v}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\frac{a_1}{l_1}\left(\frac{L_r}{v}\right)^2\right\}, \\ B &= q'\left\{2\sqrt{\frac{a_2 d_r}{\pi v}} - \frac{a_2 d_r}{l_2 v}\right\} - q''\left\{\frac{l_2 d_r}{v} - \frac{4\sqrt{a_2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{d_r}{v}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{l_2}\left(\frac{d_r}{v}\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

On remplace (51) en (49) et on trouve pour la température maximale de l'aspérité

(53) $$\theta_{\max} = \frac{AB}{\lambda_1 B + \lambda_2 A}.$$

Quand le flux thermique est constant, c.-à.-d. $q'' = 0$, $q' = q$, la formule (53) coïncide avec (14) selon (52).

On prend un exemple numérique par les données suivantes:

$$J = \frac{10^{-4}}{4.27}\frac{\text{cal}}{\text{kg cm}}, \quad f = 0.1, \quad v = 2500\frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad N_0 = 1000 \text{ kg}, \quad N_1 = 200 \text{ kg},$$

$$d_r = 2.2 \times 10^{-3} \text{ cm}, \quad L_r = 2.2 \times 10^{-2} \text{ cm}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.08 \times 10^{-4}\frac{\text{cal}}{\text{cm s g}},$$

$$l_1 = l_2 = 100 \text{ cm}, \quad a_1 = a_2 = 0.125\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}.$$

Des formules (22) on trouve

(54) $$q' = \frac{5.32}{A_r}\frac{\text{cal}}{\text{s cm}^2}, \quad q'' = \frac{1.06}{A_r}\frac{\text{cal}}{\text{s cm}^2}.$$

On remplace (54) en (52) et (53) et on trouve

(55) $$\theta_{\max} = \frac{7.48}{A_r}.$$

On voit que la température dépend de la surface réelle du contact, c.-à.-d. de la surface nominale. Quand $A_r = 2.10^{-2}$ cm^2 on obtient de (55)

$$\theta_{\max} = 374^\circ.$$

3. CALCUL DE TEMPÉRATURE D'ASPÉRITÉS PAR AUTRE MÉTHODE

Ici nous exposerons une autre méthode pour le calcul de la température de l'aspérité. Par cette méthode on étudie la balance de la chaleur d'une aspérité au cours du frottement pour un petit intervalle du temps [7]. Ici on prend la microgéométrie des aspérités qui rend compte des mollesses [8].

On prend l'équation de Fourier pour une aspérité qu'on peut considérer comme une petite perche, c.-à.-d.

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}. \tag{56}$$

Selon la méthode de Heaviside de (56) on trouve [4]

$$\theta_1(z,\, t) = L^{-1} \left[B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} z} + B_2(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}} z} \right] \tag{57}$$

où z change à l'intervalle

$$0 \leqq z \leqq H_0. \tag{58}$$

Ici H_0 est la hauteur de la couche rugueuse. Les aspérités sont les segments sphériques avec les rayons r_2 et r_1 de la base supérieure, respectivement inférieure.

Selon la loi de Fourier la quantité de la chaleur qui entre en l'aspérité par le frottement se donne par l'expression

$$d\theta = -\lambda_1 \pi r_2^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z}(0,\, t) dt. \tag{59}$$

D'autre part la même quantité se calcule directement de la puissance du frottement, c.-à.-d.

$$dQ = \frac{1}{2} J f N_1 v dt \tag{60}$$

où N_1 est la charge sur une aspérité. Pour N_1 on a [8]

$$N_1 = \frac{E\sqrt{R}\delta^{3/2}}{1.55^{3/2}} = 0.518 E\sqrt{R}\delta^{3/2}. \tag{61}$$

Ici E est le module de Ung, R — le rayon du courbement d'une aspérité et δ — la déformation à Hertz.

De formules (59) et (60) on trouve la relation

$$L^{-1}[\sqrt{s}(B_1 - B_2)] = \frac{J f N_1 v \sqrt{a_1}}{2\pi \lambda_1 r_2^2}. \tag{62}$$

La quantité dQ qui entre en l'aspérité se distribue ainsi: une part dQ' quitte par la base inférieure, une autre part dQ'' s'absorbe de la masse de l'aspérité et une troisième part dQ''' s'emet en l'environnement, c.-à.-d. on a la relation

$$dQ = dQ' + dQ'' + dQ'''. \tag{63}$$

Selon la définition des quantités dQ', dQ'', dQ''' on a les relations suivantes:

$$dQ' = -\pi \lambda_1 r_1^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z}(H_0,\, t) dt, \tag{64}$$

$$dQ'' = c_1 \rho_1 V \frac{\partial \theta_1}{\partial t} dt, \tag{65}$$

$$dQ''' = \alpha S \theta_1(z, t) dt \tag{66}$$

où V et S sont respectivement le volume et la surface environnante de l'aspérité; ces grandeurs se donnent par les expressions

$$V = \frac{\pi r_1 H_0}{3} \frac{3-k}{2-k}, \tag{67}$$

$$S = 2\pi R H_0 = \frac{2\pi r_1^2}{2-k} \tag{68}$$

où $k = \dfrac{H_0}{R}$ est le nombre qui caractérise la façon des surfaces frottantes.

Selon (57) pour la grandeur $\dfrac{\partial \theta_1}{\partial z}(H_0, t)$ on a la relation

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z}(H_0, t) = -\frac{1}{\sqrt{a_1}} L^{-1}[\sqrt{s}(B_1 - B_2)] + \frac{H_0}{a_1} L^{-1}[s(B_1 + B_2)] \tag{69}$$

qui s'obtient quand on prend en considération que la grandeur H_0 est petite, c.-à.-d. H_0^2, $H_0^3 \approx 0$. De (62) et (69) on trouve

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z}(H_0, t) = -\frac{J f N_1 v}{2\pi \lambda_1 r_2^2} + \frac{H_0}{a_1} L^{-1}[s(B_1 + B_2)]. \tag{70}$$

Selon (63)–(68) et (70) on obtient la relation

$$\frac{H_0}{a_1} L^{-1}[s(B_1 + B_1)] = \frac{J f N_1 v}{2\pi \lambda_1 r_2^2} - \frac{J f N_1 v}{2\pi \lambda_1 r_1^2} + \frac{H_0}{3a_1} \frac{3-k}{2-k} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{2\alpha \theta_1(z, t)}{\lambda_1(2-k)}. \tag{71}$$

On prend l'opérateur de Laplace à (71) et après quelques calculs on obtient

$$\frac{H_0}{a_1} s(B_1 + B_2) = \frac{1}{s} \frac{J f N_1 v}{2\pi \lambda_1} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{H_0}{3a_1} \frac{3-k}{2-k} s \theta_{1L} + \frac{2\alpha \theta_{1L}}{\lambda_1(2-k)}. \tag{72}$$

De (57) on a

$$Q_{1L}(z, s) = B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} z} + B_2(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}} z}.$$

Selon (58) on peut écrire approximativement

$$\theta_{1L} = B_1(s) + B_2(s). \tag{73}$$

De (72) et (73) on trouve l'égalité

$$\theta_{1L} = \frac{3 J f N_1 v a_1 (2-k) \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)}{2\pi s [\lambda_1 H_0 (3-2k) s - 6\alpha a_1]}. \tag{74}$$

L'expression en (74) se développe aux fractions élémentaires ainsi

$$\frac{1}{s[\lambda_1 H_0 (3-2k) s - 6\alpha a_1]} = \frac{1}{6\alpha a_1} \left[\frac{1}{s - \frac{6\alpha a_1}{H_0 \lambda_1 (3-2k)}} - \frac{1}{s} \right]. \tag{75}$$

On applique l'opérateur inverse de Laplace et selon (75) on trouve définitivement

$$\theta_1(t) = \frac{JfN_1v(2-k)\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)}{4\pi\alpha}\left[e^{\frac{6\alpha a_1 t}{H_0\lambda_1(3-2k)}}-1\right]. \tag{76}$$

On prend un exemple numérique par les données suivantes:

$$f=0.1,\quad v=2500\frac{\text{cm}}{\text{s}},\quad \delta=1.1\times10^{-4}\text{cm},\quad H_0=10^{-3}\text{ cm},\ R=10^{-2}\text{ cm},$$

$$k=0.1,\quad N=500\text{ kg},\quad a_1=0.125\frac{\text{cm}^2}{\text{s}},\quad \lambda_1=1.08\times10^{-4},\quad E=2.1\times10^6\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

$$\alpha=10^{-6}\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\text{ s grad}},\quad r_2=1.48\times10^{-3}\text{ cm},\quad r_1=2.55\times10^{-3}\text{ cm}.$$

Pour cet exemple on obtient de (76)

$$\theta_1(t)=3.35\times10^7(e^{2.48t}-1). \tag{77}$$

Selon (77) pour le temps 10^{-6} s $< t < 10^{-5}$ s la température varie respectivement

$$83^\circ < \theta_1 < 830^\circ.$$

Ayant en vue que la température d'une brûlure est environ 400°, il est clair que la formule (77) est valide pour $t < 10^{-5}$ s par ces données numériques.

RÉFÉRENCES

1. Мамхегов, М. А. Расчёт температуры трения фрикционных устройств. — Трение и износ, т. 7, № 2, 1986, 261–263.
2. Чичинадзе, А. В., Э. Д. Браун, А. Г. Гинзбург, З. В. Игнатьева. Расчет, испитание и подбор фрикционных пар. М., 1979, 42–47.
3. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Т. II, М., 1950.
4. Лыков, А. В. Теория теплопроводности. М., 1967.
5. Карслоу, Г., Д. Егер. Операционные методы в прикладной математике, М., 1948.
6. Чакалов, Л. Увод в теорията на аналитичните функции. С., 1955.
7. Диамандиев, В. Температура на грапавините на два триещи се вала. В: Трибология '92, 1992, 43–51.
8. Манолов, Н. Пневматична проводимост на грапави тела. — Год. ВУЗ, техн. физика, Т. XI, кн. 2, 1974.
9. Diamandiev, V. On the rough surface maximum temperature of a tribologic system. — Год. Соф. унив., т. 85, кн. 2 — Механика, 1993.
10. Kuhlmann-Wilsdorf, D. — Wear, **105**, 3, 1985, 187–195.
11. Uppal, A. H., S. D. Proberts. Deformation of single multiple asperity of modelling clay. — Wear, vol. 23, 1973.