ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Приложна математика и информатика
Том 89, 1995

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mathématiques Appliquée et Informatique
Tome 89, 1995

# MOUVEMENT D'UNE SPHÈRE HOMOGÈNE DANS UN CYLINDRE HORIZONTAL AVEC UN MOMENT RÉSISTANT DE FROTTEMENT

SONIA DENEVA

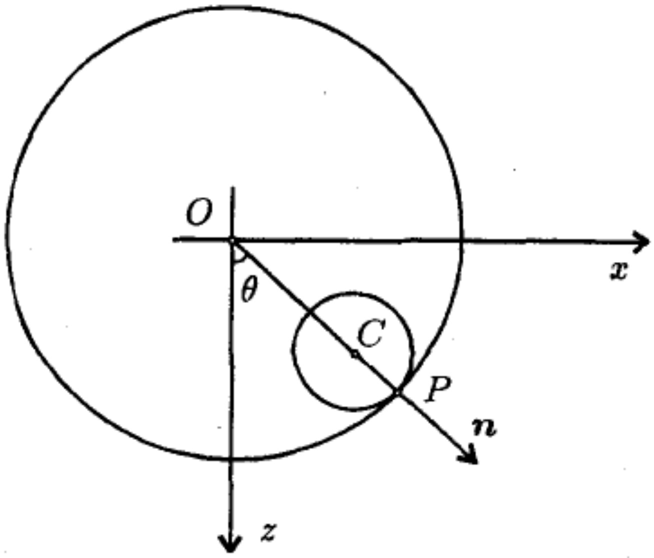
In this paper some aspects of the classical problem concerning rolling sphere on a homogeneous horizontal cylinder are considered.

**Keywords:** motion of a rigid sphere, friction.
**1991/95 Mathematics Subject Classification:** 70E15.

Soit donné un cylindere droit circulaire de rayon $R$ posé en une position horizontale immobile. Avec le cylindre est lié un système de coordonnées $Oxyz$; pour $Oy$ nous choisissons l'axe du cylindre et $Oz$ a une direction verticale en bas. La sphère homogène de centre $C$, de masse $m$ et de rayon $r$ se roule sur la part inférieur du cylindre où elle a un point de contacte $P$. Nous supposons que le mouvement devient avec frottement entre deux corps mais si le coefficient du frottement est grand il n'est pas possible un mouvement avec glissement. Voila pourquoi nous supposons que le mouvement de la sphère est un roulement propre sans glissement mais nous prenons en considération qu'il y a un moment résistant de frottement contre roulement d'après Painlevé. Nous supposons encore que le plan équatorial de la sphère reste toujours sur le plan vertical $Oxz$ du cylindre. La position de la sphère sur le cylindre est donnée au dessin 1. D'isi nous avons

$$\delta = R - r = OC. \tag{1}$$

Designons par $\theta$ l'angle $(\widehat{Oz, OP})$ qui détermine la position du point $P$. Le vecteur




Dess. 1

unique $\boldsymbol{n}$ qui est normal à deux surfaces s'exprime par la formule

$$\boldsymbol{n} = \sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Selon (1) et (2) nous obtenons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \delta\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \delta\cos\theta\,\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{v}_C &= \delta\dot{\theta}(\cos\theta\,\boldsymbol{i} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}), \end{aligned} \tag{3}$$

où $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont orts du système $Oxyz$.

Puisque le plan équatorial de la sphère reste verticale, la vitesse angulaire $\omega$ de la sphère a la forme

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{j}, \quad \omega > 0. \tag{4}$$

Le mouvement est un roulement sans glissement et voila pourquoi nous avons la relation pour le point de contacte

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CP} = 0. \tag{5}$$

Ayant vu (2), (3) et (4), nous obtenons de (5)

$$\omega = -\frac{\delta}{r}\dot{\theta} \tag{6}$$

(la grandeur $\dot{\theta} < 0$ parce que $\theta$ est une fonction de croissante du temps).

Nous montrons que tous les grandeurs de la cinématique et de la dynamique de la sphère peuvent s'exprimer comme des fonctions de $\theta$.

Le théorème de la resultante cinétique et la théorème du moment cinétique appliqué au point $C$ se traduisent par les équations

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_C) = mg + R, \tag{7}$$

$$\frac{2}{5}mr^2\frac{d\omega}{dt} = \overrightarrow{CP} \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Gamma}. \tag{8}$$

Ici $\boldsymbol{R}$ est la force de la résistance appliquée au point $P$; $\boldsymbol{\Gamma}$ est le moment résistant du frottement qui d'après Painlevé se donne par la formule

$$\boldsymbol{\Gamma} = -f'' R_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{j} = -f'' R_{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \cdot \tag{9}$$

Le signe moins montre que le vecteur $\boldsymbol{\Gamma}$ a une direction inverse au vecteur $\boldsymbol{\omega}$, c'est-à-dire le vecteur $\boldsymbol{\Gamma}$ se résiste au roulement de la sphère déterminé par le vecteur $\boldsymbol{\omega}$. $R_{\boldsymbol{n}}$ est la grandeur de la projection de la force $\boldsymbol{R}$ sur le vecteur $\boldsymbol{n}$. Le coefficient $f''$ du frottement est ordinairement une petite grandeur. Puisque tous les vecteurs dans (6) se trouvent dans le plan $Oxz$, la force $\boldsymbol{R}$ a la forme

$$\boldsymbol{R} = R_x \boldsymbol{i} + R_z \boldsymbol{k}. \tag{10}$$

De l'équation (7) selon (10) on obtient

$$\begin{aligned} R_x &= m\delta\left(\ddot{\theta}^2 \cos\theta - \theta \sin\theta\right), \\ R_z &= -mg - m\delta\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta\right). \end{aligned} \tag{11}$$

De l'équation (11) selon (2) on obtient

$$R_{\boldsymbol{n}} = mg\cos\theta + m\delta\dot{\theta}^2. \tag{12}$$

De l'équations (8) et (9) on obtient

$$\frac{2}{5} m r^2 \frac{d\omega}{dt} = -r\sin\theta R_z + r\cos\theta R_x - f'' R_{\boldsymbol{n}}. \tag{13}$$

Remplaçons dans (13) les relations (6), (11) et (12) et après quelques calculations on obtient

$$\theta = -\frac{5}{7}\frac{g}{\delta}\sin\theta - \frac{f''}{r}\dot{\theta}^2 + \frac{5}{7}\frac{f''}{\delta}\frac{g}{r}\cos\theta. \tag{14}$$

L'équation (14) nous pouvons ecrire à la forme

$$\frac{du}{d\theta} - \frac{10}{7}\frac{f''}{r}u = -\frac{10}{7}\frac{g}{\delta}\sin\theta + \frac{10}{7}\frac{f''}{\delta}\frac{g}{r}\cos\theta; \quad u = \dot{\theta}^2. \tag{15}$$

Ayant vu que le coefficient $f''$ est une grandeur petite, nous obtenons de (15)

$$u = \dot{\theta}^2 = C\left(1 + \frac{10}{7}\frac{f''}{r}\theta\right) + \frac{10}{7}\frac{g}{\delta}\cos\theta + \frac{170}{49}\frac{f''}{\delta}\frac{g}{r}\sin\theta, \tag{16}$$

où $C$ est une constante qui dépend des conditions initiables. Puisque $\dot{\theta} < 0$ on obtient de (16)

$$\dot{\theta} = -\sqrt{C\left(1 + \frac{10}{7}\frac{f''}{r}\theta\right) + \frac{10}{7}\frac{g}{\delta}\cos\theta + \frac{170}{49}\frac{f''}{\delta}\frac{g}{r}\sin\theta}. \tag{17}$$

En fin nous obtenons de (6) et (17)

$$\omega(\theta) = \frac{\delta}{r}\sqrt{C\left(1 + \frac{10}{7}\frac{f''}{r}\theta\right) + \frac{10}{7}\frac{g}{\delta}\cos\theta + \frac{170}{49}\frac{f''}{\delta}\frac{g}{r}\sin\theta}.$$

Les grandeurs $R_n$, $R_x$, $R_z$ s'expriment aussi par l'angle $\theta$ des formules (10) et (11).

## BIBLIOGRAPHIE


1. Painlevé, P. Leçons sur le frottement. Moscou, 1954 (en Russe).
2. Cabannes, H. Cours de mecanique generale. Paris, 1962.
3. Deneva, S. Mouvement avec frottement d'une sphère homogène dans un cylindre horizontal. *Annuaire de l'Univ. de Sofia, Fac. de Math. et Informatique*, t. 87, 1993.



*Received on June 15, 1996*